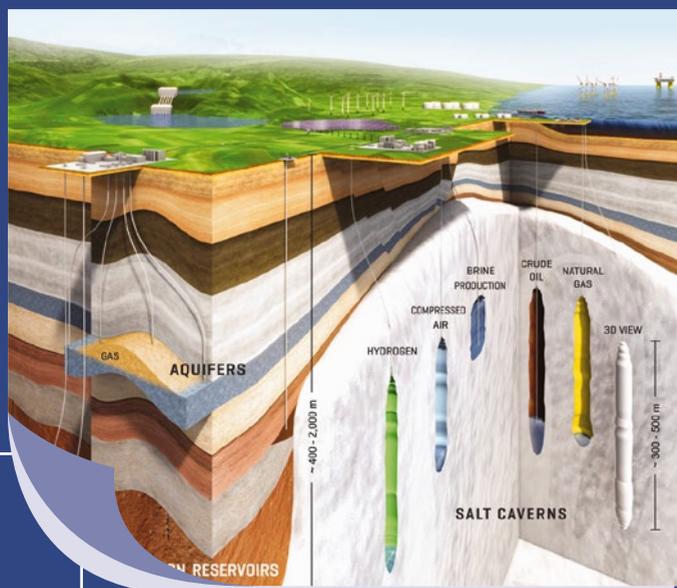


Fondements de la Géomécanique

pour le stockage géologique
et problèmes pétroliers

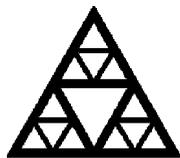
Amade POUYA



Fondements de la Géomécanique

pour le stockage géologique
et problèmes pétroliers

Amade **POUYA**



Presses des Ponts

SOMMAIRE

Liste des symboles	9
--------------------------	---

Préface	11
---------------	----

Introduction.....	13
-------------------	----

CHAPITRE 1

Contraintes et déformations.....	17
----------------------------------	----

1 Introduction	17
2 Déformations des solides	21
3 Tenseur des contraintes	25
4 Contraintes normales et de cisaillement.....	27
5 Calcul des contraintes sur les plans de discontinuités.....	29
6 Contraintes principales	30
7 Invariants du tenseur des contraintes	32
8 Contrainte moyenne et déviateur des contraintes	32
9 Contrainte équivalente de Mises.....	33
10 Angle de Lode.....	34
11 Exemple de diagonalisation du tenseur des contraintes.....	35

CHAPITRE 2

Élasticité Linéaire	37
---------------------------	----

1 Introduction	37
2 Elasticité linéaire isotrope.....	38
2.1 Formulation mathématique.....	38
2.2 Aspect phénoménologique	39
2.3 Modules de cisaillement et de compression	42
3 Trajet de chargement oedométrique.....	43
4 Relations entre les différents coefficients d'élasticité linéaire et isotrope.....	44
5 Contraintes planes et déformations planes	45
6 Anisotropie	47
6.1 Matériaux orthotropes	51
6.2 Isotropie transversale.....	53

7	Variables adimensionnelles de Thomsen	56
8	Matériau isotrope.....	57
9	Anisotropie ellipsoïdale	58
9.1	Matériau à isotropie ellipsoïdal de Saint Venant.....	58
9.2	Matériau ellipsoïdal à isotropie transversale.....	60

CHAPITRE 3

Thermo-Poro-Elasticité	63
1 Introduction	63
2 Thermoélasticité.....	63
2.1 Déformation thermique libre	64
2.2 Modèle thermoélastique linéaire	65
2.3 Exemples de contraintes thermiques.....	66
3 Milieu poroélastique.....	72
3.1 Matériau poroélastique linéaire isotrope.....	75
3.2 Paramètres non drainés.....	77
3.3 Concept de contrainte effective.....	78
3.4 Identification des paramètres poroélastiques.....	78
3.5 Essais triaxiaux	80
3.6 Poroélasticité anisotrope.....	83
4 Équivalences thermoélasticité-poroélasticité.....	85
5 Thermo-poroélasticité.....	87

CHAPITRE 4

Critères de résistance	93
1 Introduction	93
2 Comportement des roches sous compression	93
2.1 Allure des courbes contrainte-déformation	93
2.2 Effet de la contrainte moyenne	95
3 Critères de résistance des roches	97
4 Critères de résistances isotropes	98
4.1 Critère de résistance en traction	99
4.2 Critère de résistance en cisaillement pur (Tresca)	99
4.3 Critère de Mohr-Coulomb	100
4.4 Cercles de Mohr	102
4.5 Critères de rupture utilisant les cercles de Mohr.....	105

4.6	Critère de Mohr-Coulomb	106
4.7	Domaine de résistance dans l'espace des contraintes principales..	108
4.8	Orientation du plan de rupture.....	109
4.9	Points faibles du critère de Mohr-Coulomb	110
4.10	Critère de Mogi	111
4.11	Critère de Hoek & Brown	112
4.12	Critère de Von Mises.....	113
4.13	Critère de Drucker Prager	114
4.14	Critère de Liolios & Exadaktylos.....	117
4.15	Critère hyperbolique de Pouya	117
5	Critères de résistance anisotropes	120
5.1	Effets de pression de pore	121
6	Exemples de valeurs de paramètres de résistance des roches	122

CHAPITRE 5

Plasticité.....	123
1 Concepts généraux.....	123
2 Plasticité parfaite	125
3 Formalisme d'élastoplasticité	126
3.1 Forme générale de modèle constitutif.....	126
3.2 Règles d'écoulement plastique	128
3.3 Méthode de résolution du problème d'incrément plastique.....	128
3.4 Matériaux multipotentiels	131
4 Solution de vitesse de déformation plastique.....	132
4.1 Méthode générale.....	132
4.2 Matériaux à déformation plastique isochore : Exemple de Mises..	134
4.3 Modèle de plasticité avec écrouissage : Exemple de Drucker-Prager ..	135
4.4 Matériau de Mohr-Coulomb.....	136

CHAPITRE 6

Fluage et Viscosité.....	137
1 Concepts généraux.....	137
2 Phénoménologie du comportement visqueux.....	139
2.1 Sensibilité à la vitesse.....	139
2.2 Relaxation des contraintes	139
2.3 Fluage.....	141

3	Modèles de comportement visqueux de matériaux	143
3.1	Matériau de Maxwell	145
3.2	Matériau de Kelvin.....	146
3.3	Matériau de Burger	147
3.4	Modèle de Lemaître	148
4	Extension 3D des modèles 1D.....	149
5	Seuil de fluage	152
5.1	Modèle de fluage de Lemaître à seuil	152
5.2	Loi ANELVIP	153
6	Exemple du Sel Gemme	153

CHAPITRE 7

	Modélisation THM des ouvrages profonds.....	155
1	Introduction	155
2	Problème de diffusion hydraulique	156
3	Problème de diffusion thermique	158
4	Problème de corps solide déformable	160
5	Contraintes in situ	162
5.1	Contraintes géostatiques.....	162
5.2	Contraintes dans les zones de failles	163
5.3	Estimation des contraintes par des mesures dans les puits.....	165
5.4	Relations empiriques	166
6	Problèmes spécifiques de modélisations des ouvrages souterrains	166
6.1	Simplifications pour les contraintes au voisinage de la paroi	169
7	Creusement d'ouvrage en milieu élastoplastique	170
7.1	Trajet de chargement.....	170
7.2	Méthode de résolution numérique	172
8	Creusement dans un milieu poroélastique linéaire.....	173
8.1	Variations dues au creusement instantané.....	174
8.2	Évolution transitoire après le creusement	175

CHAPITRE 8

	Contraintes et déplacements autour des ouvrages en milieux élastiques.....	179
1	Ouvrages cylindriques.....	179
1.1	Conditions aux limites	181
1.2	Matériau isotrope et contraintes in situ d'isotropie transversale ...	182
1.3	Contrainte hors plan.....	185

1.4	Matériau isotrope et contraintes initiales anisotropes.....	186
1.5	Contraintes et déplacements à la paroi.....	188
2	Contraintes et déplacements autour des ouvrages sphériques.....	189
2.1	Équations d'équilibre.....	190
2.2	Conditions aux limites.....	191
2.3	Résolution des équations.....	191
2.4	Sphère Creuse.....	191

CHAPITRE 9

	Ouvrages en milieux élastoplastiques.....	195
1	Galerie de section circulaire dans une formation élastoplastique.....	195
1.1	Rayon plastique.....	197
1.2	Solution pour le Critère de Mohr-Coulomb.....	197
1.3	Solution pour le Critère de Tresca.....	200
2	Cavité sphérique dans une formation élastoplastique.....	201
2.1	Solution pour le Critère de Mohr-Coulomb.....	201
2.2	Solution pour le Critère de Tresca.....	203

CHAPITRE 10

	Ouvrages en milieux poroélastiques.....	205
1	État immédiatement après le creusement.....	205
2	Évolution après le creusement.....	207
3	Évolution des champs de contraintes et de déplacements pour des conditions isotropes.....	209
3.1	Solution générale.....	209
3.2	Solution du problème d'évolution transitoire.....	210
3.3	Solution totale.....	212
3.4	Exemple de tunnel non revêtu.....	213
3.5	Exemple de tunnel à revêtement étanche.....	214
3.6	Exemple de puits vertical dans une roche réservoir isotrope.....	215

CHAPITRE 11

	Ouvrages en milieux viscoélastiques.....	219
1	Équations constitutives.....	219
2	État stationnaire de fluage.....	220
3	Ouvrages cylindriques.....	222

4	Ouvrage dans un milieu infini	225
5	Fluage des ouvrages cylindriques dans des milieux de Norton-Hoff	226
6	Massif isotrope dans un état de contraintes <i>in situ</i> isotropes.....	227
7	État de fluage stationnaire (ouvrage cylindrique)	228
8	Cavités sphériques	231
9	Équations d'évolution	233
10	Cavité en milieu infini	234
11	État de fluage stationnaire (ouvrage sphérique).....	235
	Références bibliographiques.....	239

Liste des symboles

ε	Déformation totale, tenseur
ε^e	Déformation élastique, tenseur
ε^p	Déformation plastique, tenseur
ε^{vp}	Déformation viscoplastique, tenseur
ε_{vol}	Déformation volumique, scalaire, négative en contraction
σ	Contrainte totale, tenseur
σ'	Contrainte effective, tenseur
σ^0	Contrainte initiale du terrain, tenseur, composantes négatives pour compression
σ^0	Contrainte initiale isotrope du terrain, scalaire, négatif pour compression
E	Module d'Young
ν	Coefficient de Poisson (isotrope)
ν_{ij}	Coefficient de Poisson matériau anisotrope ($i, j = 1, 2, 3$)
λ	Coefficient de Lamé (élasticité isotrope)
K	Module de compression (isotrope, non drainé si poroélastique)
K^u	Module de compression non drainé (isotrope)
G	Module de cisaillement (isotrope)
p	Pression interstitielle
b	Coefficient de Biot (matériau poroélastique)

Préface

La géomécanique est une discipline scientifique dont les développements se situent au carrefour de plusieurs domaines de la science et de l'ingénierie : géologie, géophysique, mécanique des matériaux, ingénierie du sous-sol. Les roches ont généralement une microstructure complexe et contiennent des discontinuités et des hétérogénéités à plusieurs échelles, ce qui rend leur comportement plus complexe que celui de la plupart des matériaux courants de l'ingénieur. Par la présence de fissures et de pores, les roches sont des milieux poreux et la présence d'un ou plusieurs fluides interstitiels affecte donc les mécanismes de déformation, d'endommagement et de rupture des géostructures.

Ce nouvel ouvrage présente les concepts et les développements théoriques fondamentaux de thermo-poro-mécanique appliqués aux roches afin donner à l'ingénieur les outils de modélisation pour une large gamme d'applications en particulier celles liées à la production d'énergie (géothermie profonde, génie pétrolier), et au stockage en souterrain (séquestration du CO₂, enfouissement des déchets nucléaires, stockage géologique d'énergie).

La grande expertise d'Amade Pouya, Professeur à l'École des Ponts ParisTech, dans le domaine de la modélisation analytique et numérique en géomécanique se reflète dans l'étendue des sujets abordés. La présentation rigoureuse des outils d'analyse et des développements analytiques, la richesse des approches incluant le comportement des roches modélisé par les outils de la mécanique des milieux continus, prenant en compte l'anisotropie et les effets des fluides et de la température, font de ce livre un ouvrage de référence pour les étudiants, les chercheurs et les ingénieurs.

Jean Sulem

Professeur à l'École des Ponts ParisTech

Directeur du Laboratoire Navier

Introduction

Au fil des dernières décennies, l'intérêt pour le sous-sol profond s'est considérablement accru en raison de diverses applications industrielles liées aux enjeux énergétiques et environnementaux. Outre les défis inhérents aux mines profondes et à leur conception qui suscitent naturellement l'intérêt des ingénieurs pour le comportement des roches en grandes profondeurs, de nouveaux problèmes et activités liés à l'exploitation du sous-sol pour le stockage des matières ou de l'énergie se sont ajoutés.

Le *stockage géologique* a débuté avec le stockage de gaz et d'hydrocarbures dans les cavités salines profondes, qui a connu un développement majeur dans les années 70 suite au choc pétrolier de 1974. Le stockage dans les cavités lessivées dans le sel gemme, d'une profondeur de plusieurs centaines de mètres, s'est révélée être une solution économiquement avantageuse et sûre pour stocker des grands volumes d'hydrocarbures. Toutefois, cette technique s'est vite heurtée au problème de fluage du sel gemme qui entraîne la convergence ou la fermeture des cavités sous l'effet du poids des terrains. Ce problème était relativement inédit dans la conception d'ouvrages souterrains, ce qui a incité les ingénieurs à analyser le phénomène de fluage du sel gemme.

Le stockage géologique s'est rapidement diversifié et élargi afin d'inclure d'autres types de matières stockées et d'autres formations hôtes. Chaque nouvelle application a introduit de nouveaux défis concernant le comportement thermo-hydro-mécaniques des roches pour les ingénieurs.

À partir des années 1980, les projets d'enfouissement des déchets radioactifs ont joué un rôle majeur dans la promotion du stockage géologique. La diversité des formations géologiques considérées dans différents pays pour l'enfouissement de ces déchets telles que le sel gemme, le granite, le gneiss et les argilites, ainsi que la multitude des phénomènes thermo-hydro-mécaniques susceptibles de se produire dans ces différentes roches, ont nécessité une analyse et une modélisation approfondie afin de garantir la sûreté des ouvrages sur des milliers d'années. Ces enjeux ont posé des problèmes complexes pour les chercheurs.

Le stockage géologique s'est ensuite étendu à d'autres formes de matières et d'énergie et chaque application a engendré ses propres problématiques spécifiques. Le stockage d'énergie sous forme d'air comprimé est une solution visant à réguler l'offre et la demande sur les réseaux électriques, en complément de la production d'énergies renouvelables qui sont intermittentes, telles que l'éolien et le solaire. Cependant, cette technique, qui impose des charges cycliques à la formation rocheuse, soulève le problème de la fatigue cyclique des roches.

La séquestration du CO₂ dans les réservoirs pétroliers *déplétés* est une solution pour débarrasser l'atmosphère de ce gaz à effet de serre tout en augmentant, dans certains cas, la productivité des puits. Toutefois, cette technique induit un risque d'activation de failles et de sismicité. De nos jours, on envisage également le stockage souterrain de l'énergie sous forme de chaleur ainsi que le stockage de l'hydrogène dans les cavités salines qui semble être une voie très prometteuse et qui suscite de nombreuses études et recherches.

L'exploitation géothermique, en tant que ressource d'énergie renouvelable, est une autre activité industrielle qui engendre un intérêt croissant pour le comportement des roches en profondeur. Elle nécessite l'étude des écoulements de fluides à travers des roches fracturées, en considérant les phénomènes thermiques, hydrauliques et mécaniques couplés.

En parallèle de ces activités relativement récentes, l'ingénierie des réservoirs pétroliers qui s'appuyait essentiellement sur la modélisation de la diffusion hydraulique au sein des réservoirs, a de plus en plus fait appel, depuis les années 1990, à la Mécanique et aux couplages hydromécaniques. Cet intérêt pour le couplage entre la diffusion hydraulique et la mécanique a été l'un des moteurs du développement de la théorie Poromécanique.

Enfin, dans le domaine plus classique des tunnels destinés au transport routier et ferroviaire, on observe une tendance à la construction d'ouvrages à des profondeurs plus importantes afin de traverser les mers et les hautes montagnes. La conception de ces ouvrages pose alors de nouveaux défis, tels que le fluage des roches sous fortes contraintes et parfois dans des milieux anisotropes, qui sont moins courants dans la conception des tunnels conventionnels.

Les problèmes rencontrés par les ingénieurs mécaniciens des roches dans les applications citées ci-dessus partagent plusieurs caractéristiques communes. Il est toujours question de solliciter les roches à des profondeurs considérables, soumises à des contraintes géostatiques importantes. Les roches, qui peuvent être considérées rigides en surface, du moins comparées aux sols, subissent des déformations non négligeables à ces grandes profondeurs. Par ailleurs, des phénomènes thermiques sont présents du fait du gradient géothermique et des températures plus élevées en profondeur, mais aussi en raison du dégagement de chaleur par les déchets nucléaires enfouis. Les fluides injectés pour être stockés sont à une température différente de la formation rocheuse et échangent donc de la chaleur avec cette formation. Ensuite, l'écoulement des fluides sous différentes formes constitue souvent la principale préoccupation pour le fonctionnement des ouvrages et leur rôle spécifique : il est essentiel d'assurer l'étanchéité ou l'intégrité hydraulique des ouvrages de stockage et leur fonction de barrière à l'écoulement de fluide, tandis que pour les projets géothermiques ou l'exploitation des réservoirs pétroliers, il est crucial de permettre une circulation fluide adéquate.

De plus, ces phénomènes hydrauliques, thermiques et mécaniques sont fortement couplés et interagissent entre eux. Enfin, les études et analyses des phénomènes et des ouvrages dans ce domaine reposent largement sur la modélisation par des méthodes et outils numériques.

Au cours des cinquante dernières années, les recherches et les études menées par les ingénieurs dans ces domaines ont généré pour ces applications des connaissances et des méthodes d'analyse et de modélisation qui ont progressivement formé un corpus scientifique plus ou moins identifiable et structuré, communément désigné de nos jours sous le terme de Géomécanique.

Ce livre vise à offrir une vue d'ensemble aussi complète que possible des fondements de la modélisation des phénomènes THM en Géomécanique. Il est principalement destiné à être utilisé comme un ouvrage pédagogique pour les élèves des écoles d'ingénieur. Cependant, il peut également intéresser les chercheurs et les ingénieurs à la recherche des concepts et des modèles de base pour la formulation des problèmes ou pour trouver des solutions analytiques pour des problèmes classiques dans ce domaine. Ce livre repose à la fois sur les travaux de recherche de l'auteur et sur les cours dispensés aux élèves de différentes formations d'ingénieurs, à l'École Polytechnique et l'École des Ponts Paris Tech, ainsi qu'aux ingénieurs géologues et ingénieurs pétroliers moins familiers avec la Mécanique. Par conséquent, il couvre un large éventail de niveaux de connaissances, en proposant des contenus adaptés à différents niveaux d'expertise.

Le livre est divisé en deux parties. La première, composée de 6 chapitres, traite du « matériau » et des processus de déformation élastique, plastique, visqueuse et thermo-poro-élastique ainsi que des critères de résistance. Les concepts et grandeurs physiques liés à ces phénomènes ainsi que les modèles de matériau ou lois constitutives utilisées pour les décrire, y sont présentés. La deuxième partie, qui débute au chapitre 7, aborde les « structures » que sont les ouvrages souterrains et décrit, en grandes lignes, les bases mathématiques de leur modélisation pour différents types de formations. Les chapitres suivants examinent les solutions analytiques pour les champs de contraintes et déplacements au voisinage des ouvrages de géométrie cylindrique (galeries) et sphérique (cavités) et dans les cas de formations, élastiques, élastoplastique, poroélastique et visqueuses.

L'approche et le contenu de ce livre sont axés sur la modélisation théorique, mathématique et numérique. Le lecteur devra se référer à d'autres ouvrages afin de trouver des valeurs de paramètres physiques et mécaniques des différentes lois constitutives des roches et des ouvrages considérés dans ce livre.

Ce livre s'appuie essentiellement sur l'expérience propre de l'auteur en tant qu'enseignant et chercheur sur à peu près tous les domaines abordés. Pour des développements plus approfondis qui dépassent le cadre d'un livre d'enseignement, le lecteur est renvoyé aux articles de recherche et à d'autres ouvrages de références cités à la fin du livre.

Contraintes et déformations

1 Introduction

L'analyse mécanique d'une structure repose sur trois types de données : la géométrie de la structure, les chargements appliqués et les lois de comportement mécanique des matériaux constitutifs de la structure appelées lois constitutives.

Une loi constitutive représente le comportement du matériau indépendamment de toute considération géométrique. Une analyse simple permet de montrer que les notions de force et de déplacements qui sont pertinentes pour l'analyse des structures, ne conviennent pas pour décrire le comportement des matériaux car elles ne sont pas indépendantes des aspects géométriques.

Les notions de *contrainte* et de *déformation* ont dû être introduites pour décrire les propriétés mécaniques des matériaux indépendamment des questions géométriques. On peut expliquer ces notions en considérant l'exemple simple d'une barre parallélépipédique fixée à une extrémité et soumise à une force de traction F sur l'autre extrémité. La géométrie de la barre est décrite par sa section S et sa longueur L . La force F produit un déplacement à l'extrémité de la barre et donc une variation de longueur ΔL . Du moins pour les petites valeurs de forces appliquées, on admet une relation de proportionnalité entre F et ΔL en $F = k \Delta L$, ce qui donne le modèle de *ressort linéaire*. Le *coefficient de raideur* k qui intervient ici décrit la *structure* barre parallélépipédique c'est-à-dire à la fois sa géométrie et son matériau constitutif. Une analyse simple permet de séparer les contributions de la géométrie pour obtenir un coefficient qui ne caractérise que le matériau. En assemblant deux barres en parallèle, on aura besoin d'une force deux fois plus grande pour produire le même déplacement. k est donc proportionnelle à S . En écrivant $k = k' S$ on obtient un facteur k' qui est indépendante de la section de la barre et la relation s'écrit $F = k' S \Delta L$. En assemblant deux barres en série, la même force produit un déplacement deux fois plus grand. Le coefficient k' est donc inversement proportionnel à L . En écrivant $k' = k''/L$ on obtient un coefficient qui est indépendante de la longueur L . La relation s'écrit finalement :

$$F = k'' S \Delta L / L \quad (1.1)$$

ou k'' est indépendant à la fois de S et de L et donc de la géométrie, et représente les propriétés uniquement du matériau. On l'appelle le module d'élasticité du matériau. En notant la *contrainte* $\sigma = F/S$ et la *déformation* $\varepsilon = \Delta L/L$ la relation (1.1) s'écrit :

$$\sigma = E \varepsilon \quad (1.2)$$

avec $E = k''$.

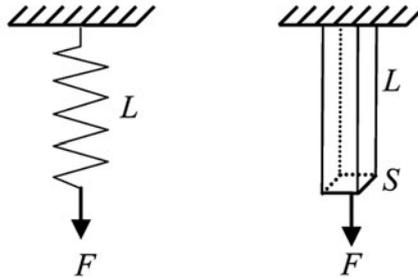


Figure 1.1 Barre élastique : une structure mécanique simple

On voit naturellement que pour passer du *coefficient de rigidité* de structure k qui dépend de sa géométrie à un paramètre qui n'exprime que les propriétés du matériau, il faut passer d'une description en termes de forces et déplacement à une description entre les *contraintes* qui sont les forces divisées par les surfaces et des déformations qui sont, en l'occurrence, la variation relative de longueur.

La relation (1.2) représente un modèle d'élasticité unidimensionnelle. Ce modèle de proportionnalité entre la contrainte et la déformation n'est qu'une représentation très simplifiée du comportement réel des matériaux. Le modèle de ressort linéaire dont elle s'inspire inclut en effet un certain nombre d'hypothèses implicites très réductrices. Elle suppose par exemple que l'élongation ΔL est produite de manière instantanée dès qu'on applique la force. Si on met cette hypothèse de côté, en admettant que l'élongation peut prendre un certain temps pour se produire, on obtient un modèle de matériau visqueux. Le modèle de ressort suppose aussi qu'en supprimant la force le ressort retrouve sa longueur initiale. Si cette hypothèse est éliminée en admettant qu'au moins une partie de la déformation produite par la force puisse subsister de manière permanente, on obtient le modèle de matériau *plastique* ou *élastoplastique*. En supposant que le module d'Young E n'est pas constant et subit une dégradation quand le ressort subit des déformations importantes, ce qui est souvent le cas des matériaux comme les roches et le béton, on trouve le concept du matériau endommageable.

Ces phénomènes divers et variés sont souvent présents simultanément dans le processus de déformation d'un matériau. La figure suivante présente la courbe de contrainte-déformation d'une éprouvette de craie.



Figure 1.2 Essai de compression sur une éprouvette de craie

Elle montre que la relation entre la contrainte et la déformation ne peut pas être exprimé par une fonction simple $\sigma = f(\varepsilon)$. En dehors des non linéarités, et la non monotonie, on peut noter aussi que cette relation n'est pas biunivoque et qu'il faut distinguer entre les trajets de charge et décharge, ce qui amène à proposer des lois de type *incrémental* pour décrire cette relation.

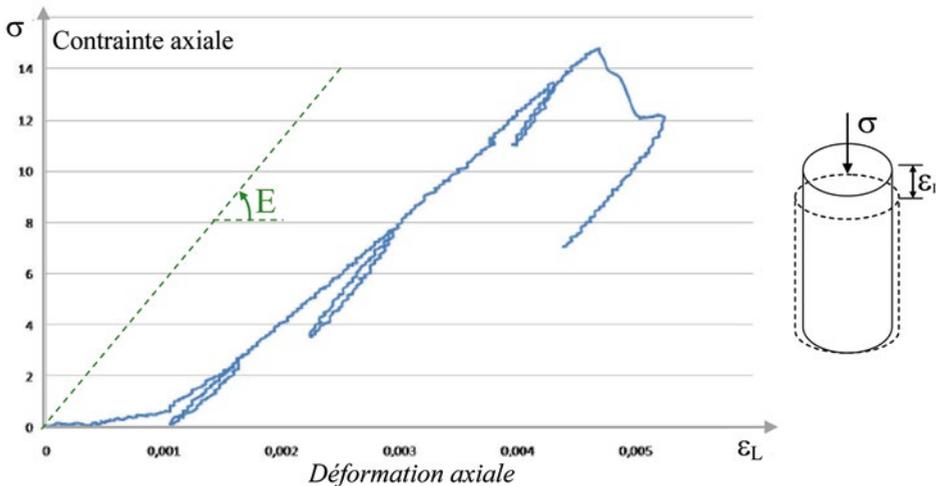


Figure 1.3 Courbe de contrainte déformation d'une éprouvette de craie sous compression uniaxiale

Dans les chapitres suivants, nous allons étudier en détails ces différents phénomènes surtout du point de vue de modèles constitutifs de matériaux qui peuvent les présenter.

Il est important de souligner qu'à travers tout ce livre nous travaillerons dans le cadre de deux hypothèses fondamentales des *petites déformations* et des processus *quasistatiques*.

L'hypothèse des *petites déformations*, ou des *déformations linéarisées*, dont la signification mathématique est donnée dans la section suivante, se justifie par l'ordre de grandeur des déformations que subissent les matériaux, essentiellement roches, dans les évolutions étudiés dans ce livre. Pour prendre un exemple concret, prenons le cas typique d'un tunnel à 500 m de profondeur dans une roche argilite (ouvrages de stockage de déchets radioactifs de l'ANDRA). La contrainte orthoradiale à la paroi est de l'ordre de 30 MPa et le module d'Young de la roche autour de 10 000 MPa. L'ordre de grandeur de la déformation élastique est donc de 10^{-3} et les termes d'ordre 2 ou plus en gradient de déplacement peuvent être négligés (voir la section suivante). Cela justifie l'hypothèse de déformations linéarisées.

La limite des déformations élastiques des roches dépasse en effet rarement 10^{-3} et même les déformations plastiques et visqueuses des roches, malgré leurs effets importants sur la structure, peuvent être modélisés avec une précision suffisante pour les besoins de l'ingénieur, en restant dans le cadre des petites déformations. Seules les déformations visqueuses de certaines roches comme le sel gemme dans certains cas de cavités en grande profondeur et pour des durées de fluage longues peuvent faire exception à cette règle et atteindre des valeurs élevées de l'ordre de quelques pourcents. Mais même pour ces cas, l'approximation des déformations linéarisées peut suffire pour les études de l'ingénieur.

La deuxième hypothèse signifie que nous n'allons pas tenir compte des effets des efforts dynamiques ou des forces de l'inertie dans l'évolution des structures étudiées. Cela suppose que l'application du chargement sur les structures se fait de manière extrêmement lente et produit une évolution lente du système dans laquelle les efforts d'inertie sont négligeables. Il faut noter cependant que mêmes en appliquant un chargement lent sur le système, l'évolution peut devenir brutale et donc dynamique à certains instants, par exemple lors de la rupture fragile d'une partie d'une structure. Mais dans ce cas, l'hypothèse de modélisation quasistatique signifie que nous ne nous intéressons pas à décrire le processus dynamique et dissipatif qui prend place un bref instant, mais seulement l'état d'équilibre auquel il va aboutir. Modélisation quasistatique consiste en effet à décrire la succession d'états d'équilibres que le système traverse sous l'effet d'un chargement extrêmement lent.

2 Déformations des solides

Nous considérons un corps solide occupant un domaine Ω dans l'espace R^3 . Lors d'un processus de déformation, chaque point \underline{x} de ce corps subit un déplacement $\underline{u}(\underline{x})$ l'amenant à une nouvelle position \underline{X} avec :

$$\underline{X}(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{u}(\underline{x}) \quad (1.3)$$

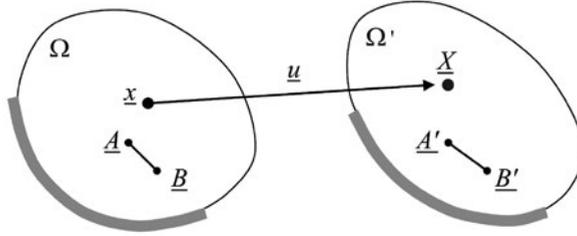


Figure 1.4. Déformation d'un corps solide changeant la géométrie Ω en Ω'

Le champ de déplacement u est supposé différentiable. Au cours de cette transformation, un segment matériel AB dans le corps Ω se transforme en $A'B'$. En supposant que ce segment est de taille infinitésimale, la variation de sa longueur calculée au premier ordre par rapport à $\|AB\|$ est donnée par :

$$\|A'B'\|^2 - \|AB\|^2 = \underline{AB} \cdot \underline{E} \cdot \underline{AB} + o(\|AB\|^2) \quad (1.4)$$

Le tenseur de déformations de Green-Lagrange E est défini par la relation suivante dans laquelle \underline{x} représente la position du point A :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad (1.5)$$

Quand les termes de gradient de déplacement $\partial u_i / \partial x_j$ sont infiniment petits, on peut négliger les termes de second ordre dans ce tenseur et on obtient alors le tenseur des *petites déformations* ou des *déformations linéarisées* ε définie par :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.6)$$

Cette définition implique plusieurs propriétés.

On peut noter d'abord que ε est un tenseur symétrique.

Ensuite, si le champ \underline{u} correspond à un déplacement de *corps rigide* alors la déformation est nulle. Un déplacement de corps rigide est composé d'une translation \underline{A} et d'une rotation donnée par un vecteur \underline{w} sous la forme suivante :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{A} + \underline{w} \wedge \underline{x} \quad (1.7)$$

où \wedge est le produit vectoriel. On peut alors introduire le tenseur ω permettant d'écrire :

$$\omega \wedge \underline{x} = \underline{\omega} \cdot \underline{x} \quad (1.8)$$

On a $\omega_{ik} = \epsilon_{ijk} w_j$ avec ϵ_{ijk} le tenseur complètement antisymétrique de Levi-Civita : $\epsilon_{ijk} = 0$ si deux des indices (i, j, k) sont égaux, $\epsilon_{ijk} = 1$ si (i, j, k) est une permutation circulaire de $(1, 2, 3)$ et $\epsilon_{ijk} = -1$ si c'est une permutation impaire. Il en résulte que ω est un tenseur antisymétrique : $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$. Les relations (1.7)

et (1.8) impliquent $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \omega_{ij}$ et, en reportant dans (1.6), comme ω est antisymé-

trique, on trouve $\varepsilon = 0$. Ce résultat justifie, inversement, l'appellation du déplacement de corps rigide ou *non déformable* pour le champ de type (1.7).

Les différentes composantes du tenseur ε représentent les variations relatives de longueur dans différentes directions ou des variations d'angles entre les lignes tracées sur le corps Ω .

Notons en effet le tenseur de déformation dans un système de coordonnées Cartésiennes (x, y, z) par :

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Considérons un parallélépipède rectangle de côtés parallèles aux axes (x, y, z) et de longueurs (a, b, c) . Il se transforme, par la déformation ε , en un parallélépipède de côtés $(a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c)$ et dont les angles entre les côtés ne sont plus forcément droits. Les composantes diagonales de ε expriment les variations de longueurs des côtés :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta a}{a}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\Delta b}{b}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\Delta c}{c} \quad (1.10)$$

Les composantes non diagonales expriment les variations d'angles ou les *distorsions*. Si toutes les faces restent rectangles, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$. Sinon, notons (α, β, γ) les angles, après déformation entre les côtés du parallélépipède (voir figure). Les composantes non diagonales donnent une mesure de la variation de ces angles par rapport aux valeurs initiales $\pi/2$.

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right), \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \quad (1.11)$$

Cette définition suppose qu'on considère la variation des angles entre les côtés orientés dans la direction positive des axes de coordonnées. En notant que

l'hypothèse des petites déformations suppose aussi des petites variations d'angles et que pour des petits angles θ on a, au premier ordre, $\tan\theta \approx \theta$, nous pouvons aussi écrire :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right), \quad \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) \quad (1.12)$$

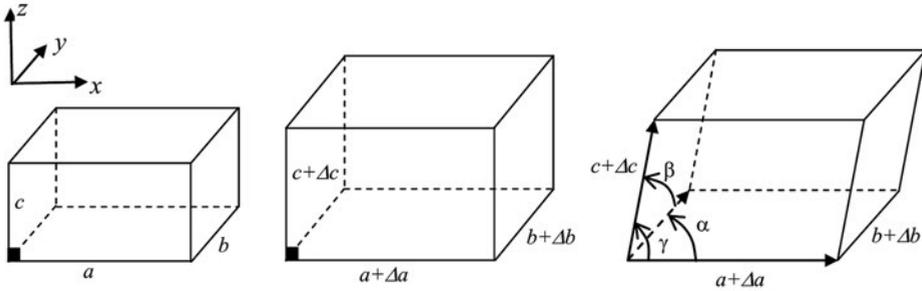


Figure 1.5 Variation des côtés et des angles d'un parallélépipède rectangle avec la déformation

Ces définitions reliées à un axe de coordonnées peuvent s'étendre à des directions quelconques des lignes tracées dans le volume. En effet, considérons un segment de droite matérielle (*i.e.*, attaché aux points matériels et les suivant dans leur mouvement), comme le segment AB de la Figure 1.4. Notons \underline{n} le vecteur unitaire parallèle à ce segment et ℓ la longueur de ce segment. La variation relative de longueur de ce segment (infinitésimal) lors de la déformation ε sera donnée par :

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} = \underline{n} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{n} \quad (1.13)$$

Cette relation permet d'ailleurs de déterminer entièrement le tenseur ε si \underline{n} balaye toutes les directions de l'espace.

La relation (1.13) montre, en particulier, que si $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$ et $\varepsilon_{xy} = 0$, alors pour toutes les directions dans le plan (x, y) la variation relative de longueur est la même.

De même, si nous supposons deux segments de droites perpendiculaires entre eux dans la configuration initiale, et en notant \underline{t} et \underline{n} les vecteurs unitaires de ces droites qui font un angle $\pi/2$ entre eux, après la déformation ces deux vecteurs feront un angle α qui vérifie :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \underline{t} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{n} \quad (1.14)$$

Une déformation isotrope dans l'espace s'écrit :

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon \underline{I} \quad (1.15)$$

où \mathbf{I} est le tenseur unité. Elle représente le seul cas de déformation sans distorsion. Tout autre cas de déformation s'accompagne de distorsion dans certaines directions. En effet, pour que $\underline{t} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{n}$ soit nulle pour tout couple de vecteurs perpendiculaire \underline{t} et \underline{n} , il faut que $\underline{\varepsilon} \cdot \underline{n}$ soit parallèle à \underline{n} pour tout \underline{n} , ce qui implique que tout vecteur \underline{n} soit vecteur propre de $\underline{\varepsilon}$. Ceci n'est vrai que pour le tenseur sphérique (1.15).

Notons que la symétrie de $\underline{\varepsilon}$ découle de sa définition et implique qu'il soit diagonalisable. Les directions propres de ce tenseur sont appelées direction principales des déformations. Ce sont les directions pour lesquelles il n'y a pas de distorsion, *i.e.*, l'angle entre ces directions ne change pas au cours de la déformation. Ceci n'exclue pas le fait que l'angle entre deux segments matériels perpendiculaires et non parallèles aux directions principales puisse changer au cours de la déformation, sauf si, comme démontré ci-dessous, la déformation est isotrope.

La figure ci-dessous illustre le fait que pour une déformation dans le plan (x, y) avec deux valeurs principales différentes, il n'y a pas de distorsion pour les directions principales, mais que l'angle entre les segments inclinés à 45° par rapport aux directions principales change avec la déformation. La déformation est donnée, dans les axes (x_1, x_2) par :

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

avec $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$. Au cours de cette déformation, deux segments parallèles aux axes x_1 et x_2 , et donc perpendiculaires entre eux, restent perpendiculaires, tandis que deux segments perpendiculaires mais dans des directions faisant un angle, par exemple 45° dans la figure, avec (x_1, x_2) ne restent pas perpendiculaires au cours de la même déformation.

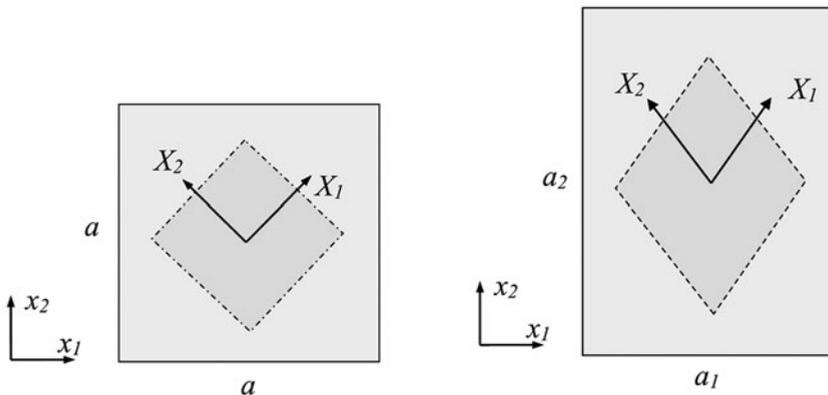


Figure 1.6 Présence de distorsion dans la déformation aux valeurs principales différentes

La déformation du matériau s'accompagne aussi de changements volumiques. La variation relative du volume d'un parallélépipède de côtés infinitésimaux (a, b, c) parallèles aux directions principales (et ne subissant donc pas de distorsion) se calcule par :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) - abc}{abc} \approx \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (1.17)$$

Nous avons utilisé l'hypothèse des petites déformations pour négliger les termes de second ordre dans cette variation. Les variations d'angles entre les côtés n'introduisent que des variations de second ordre et donc négligeables en petites déformations. En effet, si on considère la variation de la surface S d'un parallélogramme de côté (a, b) et un angle α proche de $\pi/2$ (figure), on trouve :

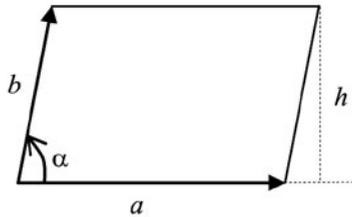


Figure 1.7 Déformation de distorsion d'une facette rectangulaire

$\Delta S = ah - ab = S(\sin\alpha - 1)$, avec $\sin\alpha = \cos(\pi/2 - \alpha) \approx \cos(2\varepsilon_{xy}) \approx 1 - (2\varepsilon_{xy})^2/2$. Donc $\Delta S/S \approx -2\varepsilon_{xy}^2$ est négligeable au premier ordre. Donc, que les directions considérées soient des directions principales ou non, ou en d'autres mots, que le tenseur ε soit diagonal ou non, la formule (1.17) reste valable. Soit :

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{ij} \delta_{ij} \quad (1.18)$$

3 Tenseur des contraintes

Considérons un volume infinitésimal cubique centré sur un point \underline{x} dans le corps Ω . L'action du reste du corps Ω sur ce volume infinitésimal par des efforts de contacts se traduit par une force infinitésimale \underline{F}^i sur chacune des faces de ce cube. On note $\underline{T}^i = \delta \underline{F}^i / \delta S^i$ le *vecteur contrainte* sur chacune des faces, et \underline{n}^i la normale unitaire *sortante* sur ces faces. On peut alors établir l'existence du tenseur des contraintes de Cauchy, noté $\boldsymbol{\sigma}$ vérifiant la relation fondamentale suivante :

$$\underline{T}^i = {}^t\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n}^i \quad (1.19)$$

Ce qui est fondamental dans cette relation est que $\boldsymbol{\sigma}$ ne dépend que du point matériel \underline{x} . Ceci veut dire que non seulement \underline{n} et \underline{T} peuvent prendre des directions

différentes pour le même cube infinitésimal, mais qu'on peut aussi considérer un cube avec des cotés orientés différemment (rotation du cube) sans que σ change : ce tenseur ne dépendant que du point x .

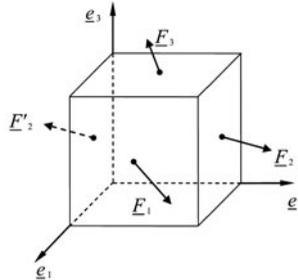


Figure 1.8 Forces appliquées sur le volume matériel infinitésimal

En utilisant le fait que le résultant et le moment de l'ensemble des forces appliquées sur les différents côtés du cube doivent être nuls, on établit que le tenseur σ doit être symétrique. En effet, notons a le côté du cube et S la surface de ses faces et considérons la projection sur e_1 du moment des forces appliquées sur les côtés. Les forces sur les côtés perpendiculaires à e_2 donnent une contribution $Sa\sigma_{23}$ et celles sur les côtés perpendiculaires à e_3 une contribution $-Sa\sigma_{32}$. La condition d'équilibre du point matériel, et en l'occurrence la condition que la somme des moments soit nulle, impose alors la condition $\sigma_{23} = \sigma_{32}$. Ceci suppose bien sûr que les champs de forces extérieures n'induisent pas de moment sur le point matériel.

$$\forall i, j; \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.20)$$

Le tenseur des contraintes ne dépend ainsi que de 6 degrés de libertés.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_{21} &= \sigma_{12} \\ \sigma_{32} &= \sigma_{23} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} \end{aligned}$$

Cette propriété de symétrie permet alors d'écrire la relation (1.19) sous la forme générale :

$$\underline{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} \quad (1.21)$$

Cette définition s'étend au cas où le volume infinitésimal considéré se trouve sur la frontière du corps Ω et \underline{T} représente alors l'action des forces extérieures sur la surface de Ω . Rappelons la règle importante suivante :

Le vecteur unitaire \underline{n} est le vecteur *sortant* du corps (ou du volume infinitésimal) et, alors, \underline{T} représente l'action des forces extérieures sur la frontière de ce corps.

Rappelons aussi que le tenseur des contraintes $\sigma(\underline{x})$ n'est pas forcément une fonction continue de \underline{x} . Considérons un corps solide Ω et une surface Γ séparant ce corps en deux parties Ω^+ et Ω^- . En un point $\underline{x} \in \Gamma$ on note $\underline{n}(\underline{x})$ la normale unitaire sur Γ pointant de Ω^- vers Ω^+ ; il est donc la normale *sortante* de Ω^- . On note aussi :

$$\sigma^-(\underline{x}) = \lim_{\substack{\underline{x}' \rightarrow \underline{x} \\ \underline{x}' \in \Omega^-}} \sigma(\underline{x}') \quad \sigma^+(\underline{x}) = \lim_{\substack{\underline{x}' \rightarrow \underline{x} \\ \underline{x}' \in \Omega^+}} \sigma(\underline{x}') \quad (1.22)$$

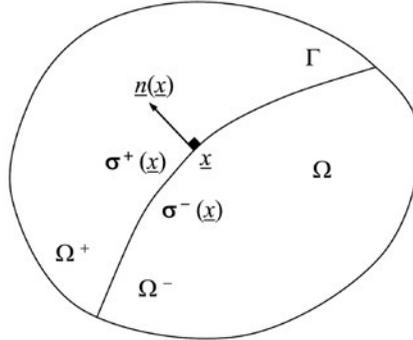


Figure 1.9 Discontinuité potentielle de la contrainte à travers une surface matérielle

La définition de σ implique, en ce qui concerne les efforts appliqués par unité de surface de Γ :

$$\underline{T}^-(\underline{x}) = \sigma^-(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \text{ représente l'effort appliqué sur } \Omega^- \text{ par } \Omega^+$$

$$\underline{T}^+(\underline{x}) = -\sigma^+(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \text{ représente l'effort appliqué sur } \Omega^+ \text{ par } \Omega^-$$

Pour le deuxième cas le signe négatif vient du fait que c'est $-\underline{n}$ qui est la normale sortante de Ω^+ . Or, d'après la loi d'action et de réaction nous devons avoir :

$$\underline{T}^-(\underline{x}) = -\underline{T}^+(\underline{x})$$

Cela implique :

$$\sigma^-(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \sigma^+(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) \quad (1.23)$$

On peut donc déduire que, si σ peut globalement être discontinue au passage de Γ , le *vecteur contrainte* $\sigma \cdot \underline{n}$ reste continu. C'est la règle de la *continuité du vecteur contrainte* au passage d'une surface matérielle.

4 Contraintes normales et de cisaillement

Les termes diagonaux du tenseur des contraintes représentent des forces normales aux plans où elles s'appliquent. Il s'agit donc des contraintes de compression ou de traction. Les termes non diagonaux représentent des forces tangentes

à ces plans et donc des efforts de cisaillement. Le signe des termes diagonaux, ou des contraintes normales, est indépendant de l'orientation des axes de coordonnées tandis que le signe des contraintes de cisaillement change avec cette orientation. Supposons par exemple qu'on change la direction du premier axe des coordonnées, en prenant $e'_1 = -e_1$, sans changer les autres. Dans ce cas σ_{11} ne change pas de signe car $\sigma'_{11} = (-e_1) \cdot \sigma \cdot (-e_1) = e_1 \cdot \sigma \cdot e_1 = \sigma_{11}$, tandis que de σ_{12} change de signe car $\sigma'_{12} = (-e_1) \cdot \sigma \cdot (e_2) = -e_1 \cdot \sigma \cdot e_2 = -\sigma_{12}$. Ainsi le signe de la contrainte normale décrit de manière intrinsèque la nature physique de l'effort appliqué : traction si le signe est positif et compression s'il négatif, tandis que le signe de la contrainte de cisaillement n'a pas de sens physique intrinsèque.

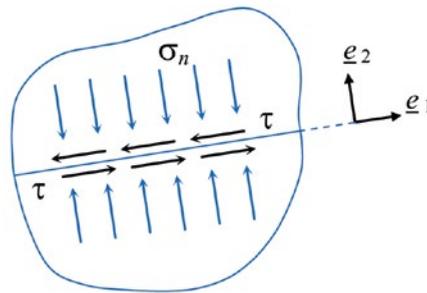


Figure 1.10 Contraintes normale et de cisaillement sur une surface matérielle

Le signe des contraintes normales de traction et de compression précisé ci-dessus découle naturellement des conventions de la Mécanique des Milieux Continus. Cependant, comme dans les problèmes de mécanique des sols et des roches, les contraintes normales sont la plupart du temps de compression, il est d'usage de représenter les contraintes de compression par des valeurs positives et donc les tractions en négatives. Il faut noter que cela ne revient pas à changer globalement le signe du tenseur des contraintes, car on ne change pas le signe et la signification des contraintes de cisaillement. Cette opération n'est donc pas une opération mathématique intrinsèque sur le tenseur des contraintes (comme multiplier le tout par -1) qu'on puisse facilement introduire dans les équations du problème. Son résultat change en particulier par une rotation des axes. Elle induit certaines difficultés dans la manipulation des équations régissant les problèmes de mécanique des sols et des roches. Il est donc recommandé de l'éviter pour les calculs numériques et analytiques et rester sur la convention MMC pour ces calculs. C'est ce qui est fait à travers tout ce livre.

Néanmoins, comme la plupart des ouvrages traitant de la mécanique des sols et des roches utilisent la convention des compressions positives et que beaucoup de modèle classiques ont été formulés sur la base de cette convention, dans certains chapitre de ce livre l'expression des formules essentielles avec les deux conventions MMC ou de Mécanique des Sols est présentée.

5 Calcul des contraintes sur les plans de discontinuités

L'exemple suivant montre comment calculer la contrainte normale et de cisaillement sur des surfaces de discontinuités (joints rocheux, fractures et failles dans les massifs rocheux) à partir du tenseur des contraintes. Une méthode élémentaire parfois utilisée est de projeter les forces dans les directions normale et tangente de la surface considérée. On montre ici comment l'utilisation du tenseur des contraintes offre une méthode plus simple et systématique pour ce calcul.

Considérons une éprouvette en configuration 2D soumise à des contraintes de compression sur ses côtés. On note S l'aire de la section de l'éprouvette dans la direction parallèle à l'axe e_1 et H sa hauteur dans la direction e_2 . L'éprouvette comprend un plan de discontinuité (joint rocheux) faisant un angle θ avec l'axe e_1 (figure). On applique une force de compression F sur la face supérieure et G sur les côtés latéraux.

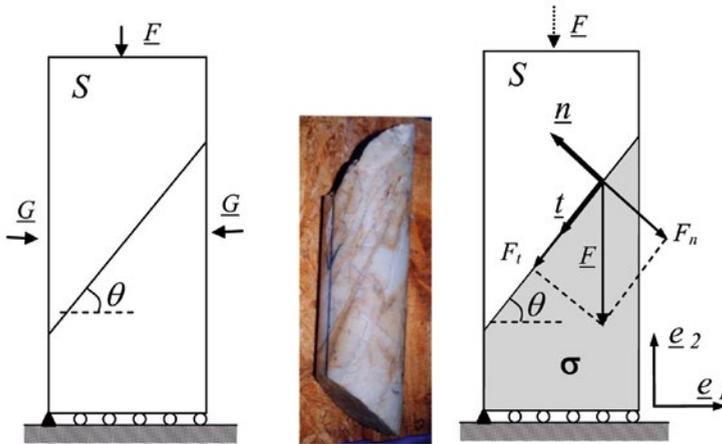


Figure 1.11 Éprouvette comprenant un plan de discontinuité

La méthode des forces consiste à projeter F et G sur la surface du joint et dans la direction normale au joint ajouter les contributions de F et de G , en prenant soin de ne pas se tromper de signe, pour calculer les contraintes de cisaillement et normale.

La méthode des contraintes consiste à calculer d'abord le tenseur des contraintes dans l'éprouvette qui correspond à une compression $-G/H$ dans la direction x et $-F/S$ dans la direction y :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad \sigma_{11} = -\frac{G}{H}, \quad \sigma_{22} = -\frac{F}{S} \quad (1.24)$$

Les vecteurs unitaires normal et tangent au joint s'écrivent :

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \underline{t} = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Le vecteur contrainte sur le joint $\underline{\sigma} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$ et ses composantes normale et tangente, σ_n et τ , se calculent respectivement par :

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \begin{bmatrix} -\sigma_{11} \sin\theta \\ \sigma_{22} \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \sigma_n &= \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \sigma_{11} \sin^2\theta + \sigma_{22} \cos^2\theta \\ \tau &= \underline{\sigma} \cdot \underline{t} = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin\theta \cos\theta \end{aligned} \quad \dots \quad (1.26)$$

On comprend l'intérêt de cette méthode, par rapport à la méthode de projection des forces, dans des situations complexes, par exemple celle de contraintes *in situ* dans les formations rocheuses profondes résultant des forces de gravités et des efforts tectoniques.

6 Contraintes principales

Comme précisé ci-dessus, les termes diagonaux du tenseur des contraintes représentent les efforts de compression/traction sur les faces où elles s'appliquent. Un tenseur de contrainte qui ne contient que ces termes, et qui est donc diagonal, facilite certaines analyses. Comme le tenseur des contraintes est symétrique, des résultats mathématiques montrent qu'il est possible de le *diagonaliser*, c'est-à-dire, de choisir des directions particulières d'axes de coordonnées dans lesquelles l'expression de ce tenseur devient diagonale. Ces directions particulières sont appelées *directions principales* du tenseur des contraintes et les valeurs diagonales du tenseur dans cette représentation, *contraintes principales*. Les contraintes principales sont les *valeurs propres* du tenseur des contraintes et se calculent par l'équation suivante :

$$|\underline{\sigma} - \lambda \underline{I}| = 0 \quad (1.27)$$

Dans cette équation $|\cdot|$ désigne le déterminant de la matrice et \underline{I} le tenseur d'identité 3×3 . Les solutions de cette équation, notées $\sigma^{(i)}_{(i=1,2,3)}$ sont les trois contraintes principales. Les directions principales sont les vecteurs non nuls \underline{u} solutions des équations aux vecteurs propres suivante :

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{u} = \sigma^{(i)} \underline{u} \quad (1.28)$$

Le tenseur $\underline{\sigma}$ possède ainsi toujours trois directions principales perpendiculaires entre elles et pouvant donc définir un système d'*axes principales*. Mais il se peut que deux ou plus des $\sigma^{(i)}$ soient identiques (cas dégénérés) et alors les directions propres pour ces contraintes ne seront pas uniques. Le cas de deux $\sigma^{(i)}$ identiques correspond à un tenseur de contrainte de symétrie axiale autour de l'axe

correspondante à la troisième contrainte. Le cas de trois $\sigma^{(i)}$ identiques correspond à un tenseur de contrainte isotrope ou sphérique.

Soit $\{\underline{u}^{(1)}, \underline{u}^{(2)}, \underline{u}^{(3)}\}$ un système d'axes formé de trois vecteurs propres unitaires ; $\|\underline{u}^{(i)}\| = 1$ ($i = 1, 2, 3$). On définit la matrice de rotation ou de changement de base \mathbf{R} de la manière suivante :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & u_1^{(3)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & u_2^{(3)} \\ u_3^{(1)} & u_3^{(2)} & u_3^{(3)} \end{bmatrix}$$

Elle permet de passer des coordonnées σ dans la base de départ (dans laquelle les coordonnées des $\underline{u}^{(i)}$ ci-dessus sont exprimées) à ses coordonnées $\tilde{\sigma}$ dans la base $\{\underline{u}^{(1)}, \underline{u}^{(2)}, \underline{u}^{(3)}\}$ par la relation :

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{R}^t \sigma \mathbf{R} \quad (1.29)$$

Noter que la matrice \mathbf{R} est orthogonale, ce qui veut dire :

$$\mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{-1} \quad (1.30)$$

Dans cette base, le tenseur des contraintes est diagonal et s'écrit simplement :

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

avec $\sigma^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) la contrainte principale associée à $\underline{u}^{(i)}$. Dans la même transformation, les vecteurs position d'un point matériel \underline{x} et de déplacement \underline{u} et le tenseur de déformation ε se transforment par les relations :

$$\tilde{\underline{x}} = \mathbf{R} \underline{x}, \quad \tilde{\underline{u}} = \mathbf{R} \underline{u}, \quad \tilde{\varepsilon} = \mathbf{R}^t \varepsilon \mathbf{R}$$

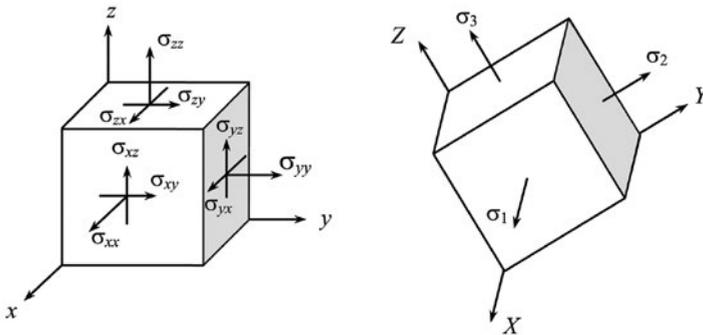


Figure 1.12 Système de coordonnées générales (gauche) et coordonnées principales (droite)

7 Invariants du tenseur des contraintes

Les coordonnées d'un vecteur changent d'un système de coordonnées à un autre mais sa norme, calculée à partir de ces coordonnées, reste inchangée. Pour les quantités tensorielles on peut définir des grandeurs qui restent invariantes lors d'un changement de base de manière similaire à la norme des vecteurs qui est une quantité invariante. On les appelle les *invariants* du tenseur. Pour un tenseur de 3×3 symétrique, comme la contrainte ou la déformation, on peut définir 3 *invariants* indépendants. Le nombre 3 de ces quantités peut-être déduit du raisonnement suivant : l'expression d'un tenseur 3×3 symétrique dépend de 6 coordonnées indépendantes. Un changement de base est défini par trois angles d'Euler. Donc les 6 degrés de libertés des coordonnées d'un tel tenseur dans une base donnée dépendent de 3 angles de rotation et de 3 autres degrés de libertés qui sont indépendants de ces angles et donc indépendants de la base considérée. Ces trois derniers degrés de libertés sont des *invariants*. Ils peuvent être calculés à partir d'*opérations tensorielles* et combinés de différentes manières.

On peut d'abord définir la *trace* d'un tenseur par :

$$tr(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{\sigma} = \delta_{ij} \sigma_{ij} = \sigma_{ii}$$

où $\boldsymbol{\delta}$ est le tenseur d'unité. La *trace* est une quantité indépendante de la base choisie car définie à l'aide de l'opération tensorielle *double contraction* entre $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\delta}$. Les trois invariants de $\boldsymbol{\sigma}$ peuvent être choisis comme étant $tr(\boldsymbol{\sigma})$, $tr(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma})$ et $tr(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma})$. Tous les invariants qu'on peut définir pour $\boldsymbol{\sigma}$ sont une combinaison de ces trois grandeurs. Mais il y a un système de 3 invariants qui est plus souvent utilisé pour écrire les lois constitutives de matériaux. Il s'agit de la $tr(\boldsymbol{\sigma})$ noté I_1 et deux autres quantités, J_2 et l'angle de Lode, qui seront introduites ci-dessous.

8 Contrainte moyenne et déviateur des contraintes

On note I_1 le premier invariant des contraintes :

$$I_1 = tr(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{\sigma} = \delta_{ij} \sigma_{ij} = \sigma_{ii} \quad (1.31)$$

et la contrainte moyenne :

$$\sigma_m = \frac{1}{3} I_1 \quad (1.32)$$

σ_m est ainsi la moyenne des termes diagonaux du tenseur des contraintes. Cette moyenne peut être calculée à partir des termes diagonaux dans une base non principale, c'est-à-dire, pour laquelle le tenseur des contraintes n'est pas diagonale : elle garde toujours la même valeur.

On appelle sphérique un tenseur de contrainte qui est proportionnel à δ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \boldsymbol{\delta} \quad (1.33)$$

avec λ un scalaire. Il est diagonal dans toute base avec valeur diagonale λ . Pour ce tenseur la contrainte moyenne est égale au terme diagonale de la matrice. C'est le cas par exemple du tenseur des contraintes dans les fluides : dans un fluide sous pression p , le tenseur des contraintes vaut :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \boldsymbol{\delta} \quad (1.34)$$

Pour un tenseur de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, avec contrainte moyenne σ_m , on appelle $\sigma_m \boldsymbol{\delta}$ la partie sphérique du tenseur. En enlevant cette partie à $\boldsymbol{\sigma}$, on obtient le *déviateur des contraintes* :

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \boldsymbol{\delta} \quad (1.35)$$

La propriété fondamentale de ce tenseur *déviatorique* est qu'il est de trace nulle :

$$\boldsymbol{S} : \boldsymbol{\delta} = 0 \quad (1.36)$$

Un tenseur de contraintes se décompose ainsi en ses deux parties sphérique $\sigma_m \boldsymbol{\delta}$ et déviatorique \boldsymbol{S} . La propriété (1.36) assure que ces deux parties sont orthogonales entre elles : $\boldsymbol{S} : (\sigma_m \boldsymbol{\delta}) = 0$. De même qu'une contrainte de pression de fluide correspond à un tenseur purement sphérique (déviateur nul), une contrainte de cisaillement pure correspond à un tenseur purement déviatorique (partie sphérique ou contrainte moyenne nulles). L'orthogonalité des parties sphérique et déviatoriques simplifie certaines analyses et aussi certaines expressions, comme par exemple celle l'énergie élastique du matériau isotrope qui se décompose en deux contributions séparées de la partie sphérique et déviatorique.

9 Contrainte équivalente de Mises

Le deuxième invariant des contraintes très utilisé pour la modélisation constitutive des matériaux est le J_2 défini par :

$$J_2 = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad (1.37)$$

Notons que pour une contrainte de cisaillement pur :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

on trouve $J_2 = |\tau|$. cet invariant est lié la *contrainte équivalent de Mises*, noté σ_e :

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} = \sqrt{3} J_2 \quad (1.39)$$

L'intérêt de cette définition est que pour une contrainte de traction ou de compression simple (uniaxiale) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

on trouve $\sigma_e = |\sigma|$. D'une manière plus générale, pour un tenseur de contraintes avec deux valeurs principales identiques :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_T & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_T & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_a \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

on trouve $\sigma_e = |\sigma_a - \sigma_T|$. C'est le cas en particulier du tenseur des contraintes d'un essai de compression sous confinement, avec σ_a la contrainte axiale et $\sigma_T = -p$ la contrainte latérale.

Les critères de résistance des matériaux font un usage intensif de ces invariants I_1, J_2 ou σ_e .

10 Angle de Lode

Le troisième invariant des contraintes qui est parfois utilisé dans les modèles constitutifs des matériaux est relié au déterminant de \mathbf{S} noté J_3 :

$$J_3 = |\mathbf{S}| \quad (1.42)$$

On utilise parfois une variable θ appelé l'angle de Lode qui est défini par la relation suivante :

$$\cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3} J_3}{2J_2^{3/2}} \quad (1.43)$$

11 Exemple de diagonalisation du tenseur des contraintes

Considérons le cas de contrainte de cisaillement pur en configuration 2D. Dans un système d'axes (x_1, x_2) , le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

Cela correspond à la configuration des contraintes représentée sur la figure de gauche ci-dessous :

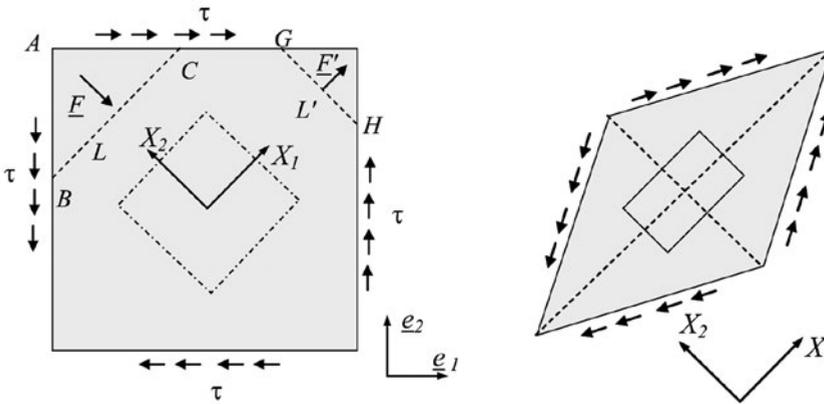


Figure 1.13 Diagonalisation d'un tenseur de cisaillement pur

Pour le même état de contraintes, si nous considérons une ligne BC faisant un angle $\pi/4$ avec les côtés du domaine carré considéré, la force totale \underline{F} appliquée par le triangle ABC sur le reste du domaine est peut-être déduit des conditions d'équilibre. Compte tenu de la force $\tau L(\sqrt{2}/2)\underline{e}_1$ appliqué sur le côté AC et $-\tau L(\sqrt{2}/2)\underline{e}_2$ sur AB, la force appliquée par le triangle ABC sur le reste du domaine, à travers le segment BC, est : $\underline{F} = \tau L(\sqrt{2}/2)(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$. On voit que cette force est perpendiculaire à BC, et donc il n'y a pas de contrainte de cisaillement sur le côté BC. Prenons alors $(\underline{E}_1, \underline{E}_2)$ deux vecteurs unitaires des axes X_1 et X_2 faisant un angle $\pi/4$ avec les côtés du carré : $\underline{E}_1 = (\underline{e}_1 - \underline{e}_2)/\sqrt{2}$ et $\underline{E}_2 = (-\underline{e}_1 + \underline{e}_2)/\sqrt{2}$. Le vecteur contrainte sur BC est $\underline{T} = \underline{F}/L = -\tau\underline{E}_2$, qui est une contrainte normale pure. De manière analogue, on trouve que le vecteur contrainte sur une ligne GH parallèle X_2 est $\underline{T}' = \underline{F}'/L' = (\sqrt{2}/2)(\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = \tau\underline{E}_1$. Donc, si le même état de contraintes est exprimé dans le système d'axes (X_1, X_2) , il s'écrit :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \tau & 0 \\ 0 & -\tau \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

Si dans le même matériau un domaine carré de côtés parallèles à X_1 et X_2 est découpé (lignes en pointillés), on trouve que ses côtés subissent une traction τ dans la direction X_1 et une compression $-\tau$ dans la direction X_2 .

Supposons maintenant que \mathbf{R} représente la matrice de rotation permettant de passer de la base initiale $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ à la base $(\underline{E}_1, \underline{E}_2)$. Elle s'écrit :

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

Et on vérifie qu'on trouve bien : $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^t \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}$.