



COURS DE PLASTICITÉ ET CALCUL À LA RUPTURE

Patrick de BUHAN
et Ghazi HASSEN





COURS DE PLASTICITÉ ET CALCUL À LA RUPTURE

Patrick de BUHAN et Ghazi HASSEN



Presses des Ponts

*Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement,
Et les mots pour le dire arrivent aisément.*

Nicolas BOILEAU (1636-1711)

Sommaire

Introduction	7
Chapitre I	
Le comportement élastoplastique	23
Chapitre II	
Problèmes d'évolution élastoplastique	69
Chapitre III	
Élastoplasticité des systèmes de poutres en flexion	105
Chapitre IV	
Approche numérique de la résolution des problèmes d'élastoplasticité	129
Chapitre v	
Problèmes d'élastoplasticité avec solutions	157
Chapitre VI	
De l'élastoplasticité au calcul à la rupture : l'exemple des systèmes de poutres en flexion	275
Chapitre VII	
Calcul à la rupture des systèmes en <i>milieu continu</i> 3D	301
Chapitre VIII	
Calcul à la rupture des plaques et dalles minces en flexion	335
Chapitre IX	
Mise en œuvre numérique des approches statique et cinématique du calcul à la rupture	355
Chapitre X	
Problèmes de calcul à la rupture avec solutions	387
Références et bibliographie	545

INTRODUCTION

1. Sur la notion de *plasticité*

On est amené à rencontrer le terme « *plasticité* » dans bien des domaines différents : qu'il s'agisse de la « *plasticité du cerveau* » dans le champ des neurosciences, de la chirurgie « *plastique* », de l'artiste pratiquant les « *arts plastiques* », ou bien encore des « *matières plastiques* », difficilement recyclables et qui en viennent aujourd'hui à menacer les océans et la biodiversité qu'ils abritent. Dans le domaine de la *mécanique et des matériaux*, qui nous occupe ici, ce terme est associé à l'idée de « *malléabilité* » c'est-à-dire à la possibilité de donner une forme permanente à la matière en lui appliquant une sollicitation mécanique que l'on vient ensuite supprimer.

Cette notion peut être parfaitement illustrée en considérant deux objets métalliques du quotidien que représentent un trombone et un ressort à spires (Figure 1). En effet, le *bon fonctionnement* de ces objets repose entièrement sur les *propriétés élastiques* du matériau métallique qui les constitue, c'est-à-dire sur leur capacité à reprendre leur forme initiale après avoir été sollicités (pincement d'un paquet de feuilles pour le trombone, compression du ressort) et donc à pouvoir à nouveau remplir leur fonction de façon répétée. À l'inverse, le *procédé de fabrication* de ces objets repose sur les *propriétés plastiques* du matériau qui seules permettent leur *mise en forme* à partir par exemple d'un fil ou d'une tige métallique, initialement rectilignes.

On constate donc que, loin de s'exclure mutuellement, les propriétés élastiques et plastiques coexistent pour un même matériau, la plasticité ne se manifestant qu'au-delà d'un certain niveau de sollicitation comme nous le verrons ultérieurement. Il convient donc plutôt de parler de matériau *élastoplastique*. Le comportement plastique d'un matériau peut dès lors être perçu de deux façons : comme une propriété indispensable à la fabrication de pièces mécaniques ou de structures d'une part, comme une propriété pouvant à l'inverse limiter le domaine d'utilisation de ces derniers d'autre part.

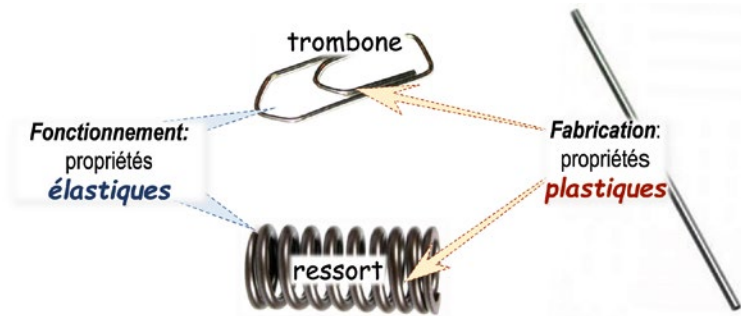


Figure 1. Exploitation des propriétés élastiques et plastiques pour le fonctionnement et la fabrication d'objets métalliques.

2. De la plasticité des métaux...

Ainsi que nous l'avons précédemment évoqué, c'est bien la *plasticité des métaux* qui est à la base de tous les *procédés de mise en forme* de pièces métalliques dans le domaine de la métallurgie et des industries mécaniques (constructions automobile et aéronautique, structures métalliques de génie civil, armatures de ferrailage du béton armé, etc.) : techniques de laminage et forgeage (à froid ou à chaud), filage, pliage, extrusion, emboutissage (Figure 2) etc.

Les premières formulations de la plasticité des métaux, élaborées il y a maintenant plus d'un siècle, permettent alors d'évaluer les efforts minimaux qu'il faut appliquer par exemple à une tôle métallique pour pouvoir la déformer de manière permanente, et donc de concevoir, dimensionner et optimiser en conséquence les machines et outils adaptés à la mise en œuvre de ces procédés. Ces procédés s'appliquent tout aussi bien à la mise en forme de matériaux de type polymères (« matières plastiques ») dans le cadre des techniques de *plasturgie*.

La plasticité des matériaux est également pleinement exploitée dans la conception de systèmes d'absorption de choc par exemple pour assurer la sécurité de véhicules automobiles (Figure 3). L'écrasement plastique des longerons de protection permet en effet de transformer l'énergie cinétique en énergie dissipée par déformation plastique de ces derniers et de décélérer le véhicule bien plus progressivement que si le choc était élastique, contribuant ainsi à mieux protéger les passagers dans l'habitacle lors de l'accident qui n'a pu être évité.

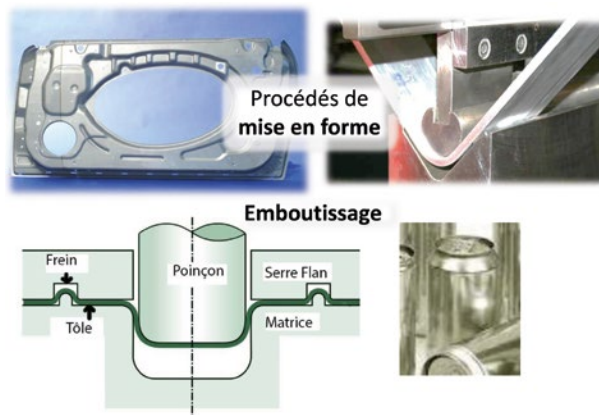


Figure 2. Procédés de mise en forme de pièces métalliques utilisant les propriétés *plastiques* des métaux.



Figure 3. Utilisation de la plasticité dans la conception de systèmes d'absorption de chocs lors d'un accident automobile

3. ...à celle des « géomatériaux » (sols, roches, bétons)...

Même si les mécanismes physiques qui entrent en jeu à l'échelle microscopique¹ peuvent être différents, des matériaux tels que sols, roches ou bétons, regroupés sous la dénomination générique de « *géomatériaux* », manifestent des caractéristiques

¹ Celle des *polycristaux* pour les métaux et des *particules granulaires* pour les sols.

plastiques évidentes². La figure 4 ci-dessous montre par exemple des structures géologiques où de telles déformations plastiques peuvent être clairement visualisées sous la forme de *plissements géologiques* à des échelles d'espace très différentes.



Figure 4. Manifestation de la plasticité de formations rocheuses à différentes échelles.

Ces plissements résultent de la déformation de couches sédimentaires, initialement horizontales, sous l'effet de processus géologiques (forces tectoniques) se déployant sur plusieurs dizaines de millions voire centaines de millions d'années, et dans des conditions de pression et de température extrêmes. Une coulée de lave volcanique offre l'illustration, à des échelles de temps et d'espace beaucoup plus petites, d'un tel processus géologique induisant des déformations plastiques qui apparaissent clairement lorsque cette lave est refroidie.

Notons d'ailleurs que de tels processus géologiques peuvent être simulés par des expériences en laboratoire sur des modèles réduits utilisant un matériau tel que la *plasticine*, qui n'est autre que la pâte à modeler (Figure 5) !

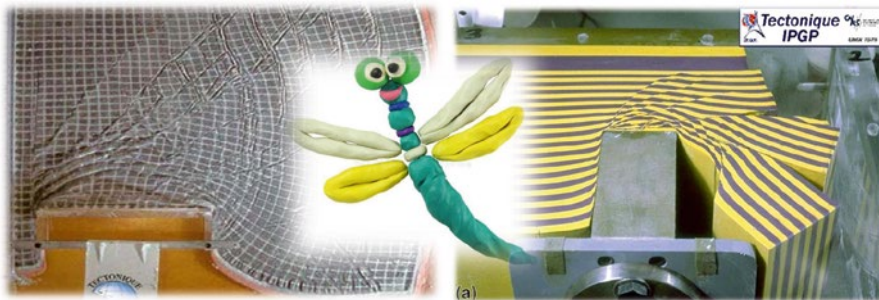


Figure 5. Simulation de processus géologiques sur modèles réduits en *plasticine*

² On parle par exemple d'argile « plastique ».

4. ... jusqu'à la rupture des structures et des ouvrages

Outre qu'elle peut remettre en cause le bon fonctionnement d'une structure ou d'une pièce mécanique³, le développement et l'accumulation de *déformations plastiques* peut conduire à la *ruine complète* d'une structure ou d'un ouvrage qui se détecte visuellement, et de façon parfois spectaculaire et même catastrophique, par le changement de géométrie auquel cette rupture donne lieu.

La figure 6(a) montre ainsi l'exemple de l'effondrement d'un pylône électrique de ligne à très haute tension sous l'effet d'une tempête, ainsi que celle d'un pont ferroviaire métallique. De même, la figure 6(b) représente la rupture brutale de deux ouvrages en béton armé et précontraint : l'effondrement du terminal 2E (à peine construit) de l'aéroport de Roissy CDG en 2004 ; celui du Pont Morandi en 2018 datant des années 60 et reconstruit depuis.

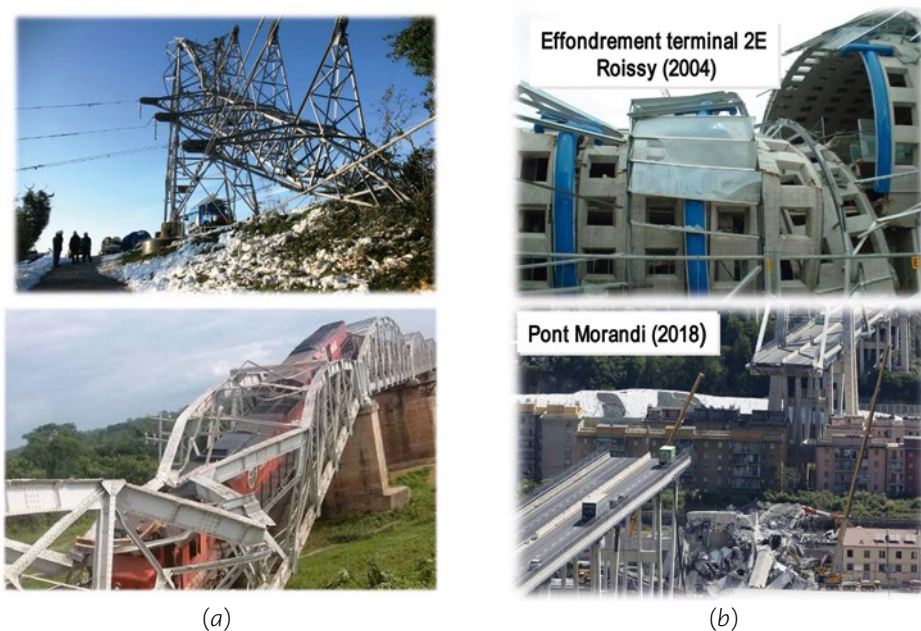


Figure 6. Effondrement (a) de constructions métalliques ;
(b) d'ouvrages en béton armé et précontraint.

³ Exemple du trombone dont on écarterait trop les deux parties assurant le pincement de la liasse de papiers.

Dans le domaine de la géotechnique, de telles ruptures concernent des ouvrages aussi divers que des pentes, remblais, soutènements ou fondations (Figure 7). Elles se manifestent le plus souvent par l'apparition de *surfaces de rupture*, où les déformations plastiques sont localisées, séparant un bloc en rotation du reste de l'ouvrage. Elles peuvent également se manifester sous la forme de glissements de terrains ou de coulées de boue aux conséquences parfois dramatiques.

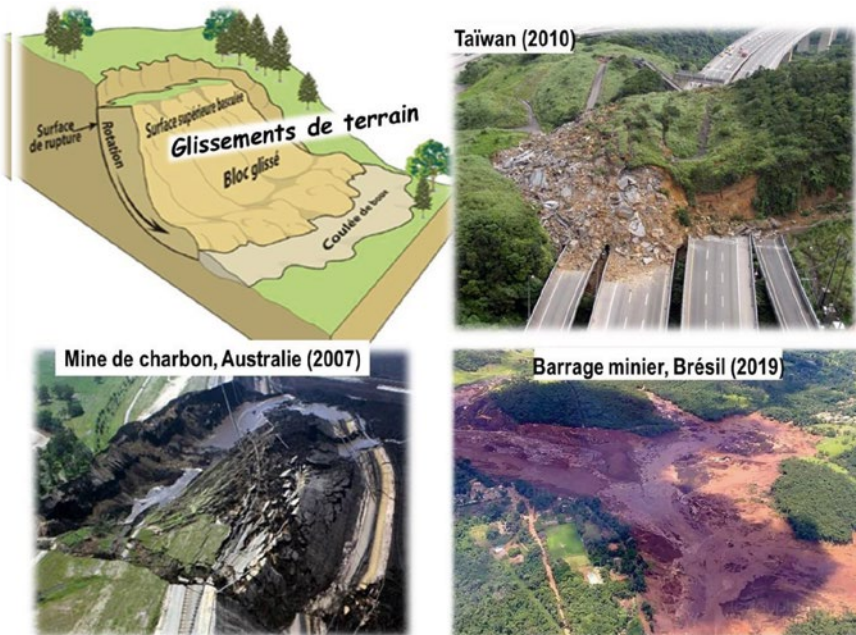


Figure 7. Rupture d'ouvrages de géotechnique : pentes, remblais, digues, glissements de terrains.

Les méthodes de dimensionnement des ouvrages de génie civil évoqués précédemment vis-à-vis de la ruine, relèvent de ce qu'il est convenu d'appeler le calcul aux *États Limites Ultimes (ELU)*⁴. Elles feront l'objet de la seconde partie de cet ouvrage consacrée à la théorie du *Calcul à la Rupture*.

⁴ À distinguer du calcul aux *États Limites de Service (ELS)* selon la terminologie adoptée dans les *Eurocodes*.

5. Objectifs généraux du cours de « *Plasticité et Calcul à la Rupture* »

Le cours de « *Plasticité et Calcul à la Rupture* » auquel le présent livre sert de document écrit de référence, se fixe un double objectif.

De façon générale, il s'agit de prendre en compte le comportement *plastique* (« *anelastique* ») des matériaux en vue d'un *dimensionnement des ouvrages* (structures métalliques, ouvrages en béton armé et précontraint, ouvrages de géotechnique, etc.) qui permette d'en assurer la *sécurité* tant vis-à-vis de leur fonctionnement en service (*État Limite de Service*), que de leur capacité portante ultime (*État Limite Ultime*).

De manière plus spécifique, l'idée consiste à fournir les *concepts théoriques*, ainsi que les *méthodes et outils* associés, permettant l'analyse du fonctionnement des *structures/ouvrages/systèmes mécaniques* au-delà de leur *limite d'élasticité* et jusqu'à leur *rupture*. Se référant par exemple à une courbe de type charge-déplacement (Figure 8)⁵ caractérisant la réponse globale d'une structure ou d'un ouvrage sous l'action du chargement qui lui est appliqué, l'analyse devra porter sur la réponse *élastoplastique* (EP) de l'ouvrage, au-delà de sa phase *élastique* (E), ainsi que sur l'évaluation la plus précise possible du chargement provoquant la *rupture* (R) de l'ouvrage, dont il s'agit absolument de se prémunir, compte-tenu des conséquences catastrophiques qu'elle peut entraîner.

Il convient en outre d'insister sur le fait que le présent cours écrit, et l'enseignement en formation d'ingénieur ou de master sur lequel il s'appuie, met avant tout l'accent sur la *résolution de problèmes aux limites* et les *méthodes de calcul* qui en découlent, compte tenu de la prise en compte du caractère *élastoplastique* des matériaux à l'échelle locale. Il ne s'agit donc pas d'un cours de *rhéologie des matériaux*, mais bien d'un cours de *calcul des structures et des ouvrages*. Tous les grands codes de calcul par éléments finis couramment utilisés aujourd'hui tant dans le domaine du génie civil que du génie mécanique ou industriel, incorporent un module dans lequel sont intégrées des lois de comportement élastoplastique plus ou moins sophistiquées.

⁵ Exemples de la flèche d'un pont sous l'action de charges d'exploitation ou du tassement d'une fondation superficielle reposant sur un massif de sol.

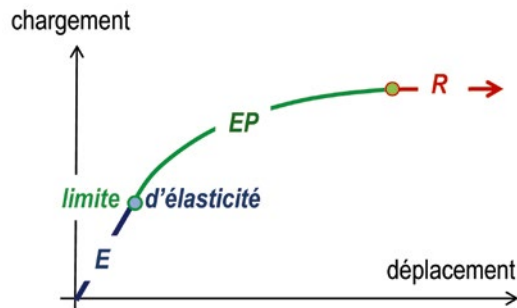


Figure 8 Courbe schématisant les réponses élastique (E) et élastoplastique (EP) ainsi que la charge de rupture ou de ruine (R) d'une structure soumise à un chargement progressivement croissant.

Ce cours de « *Plasticité et Calcul à la Rupture* » est enseigné à l'École Nationale des Ponts et Chaussées sous différentes formes depuis de nombreuses années. Il fait partie intégrante de la *base commune de formation* des étudiants qui, dans le domaine de la *Mécanique et du Calcul de structures*, établit le lien entre le cours de *Mécanique* de première année et les enseignements plus spécialisés dispensés dans le cadre du département *Génie Civil et Construction*, mais aussi potentiellement du département *Génie Mécanique et Matériaux*.

L'enseignement de Mécanique de tronc commun est en effet consacré à la présentation des concepts fondamentaux de la mécanique des milieux continus *unidimensionnels* (systèmes de poutres) et *tridimensionnels*, ainsi qu'aux méthodes de résolution par voies analytique et numérique (méthode des éléments finis) des problèmes d'équilibre (thermo)élastique. Hormis une brève initiation à la notion de critère de résistance et au raisonnement du calcul à la rupture, l'essentiel de cet enseignement se limite donc au comportement *élastique linéaire* des matériaux et des structures et représente de ce point de vue un prérequis indispensable au suivi du présent cours de « *Plasticité et Calcul à la Rupture* ».

6. Présentation générale et plan du cours

Comme déjà indiqué auparavant, l'ambition de ce cours est de fournir aux étudiants de l'ENPC, et tout particulièrement à ceux qui se destinent à une carrière d'ingénieur ou de chercheur dans les secteurs du Génie Civil ou du Génie Mécanique, des méthodes et des outils théoriques indispensables à l'analyse du

comportement *anélastique* des structures. Le choix s'est porté sur deux modèles de référence d'un tel comportement anélastique, que sont l'*Élastoplasticité* et le *Calcul à la Rupture*.

La partie consacrée à l'*Élastoplasticité* est relativement classique, même s'il convient encore une fois de souligner que la plupart des enseignements portant sur la question mettent le plus souvent l'accent sur les aspects rhéologiques et thermodynamiques de la plasticité, délaissant quelque peu ceux relatifs à la *pratique du calcul des structures* proprement dite, sur laquelle le projet de cours propose au contraire de se focaliser. La partie relative au *Calcul à la Rupture* est en revanche beaucoup plus originale, car très peu enseignée, y compris au plan international.

6.1 Élasto-plasticité (chapitres I à V)

La prise en compte de l'*élastoplasticité* des matériaux dans l'analyse du comportement des pièces mécaniques tout comme des ouvrages et structures de génie civil, constitue le premier volet de l'enseignement proposé. Comme nous l'avons vu, ce comportement est à la base de la modélisation et de l'optimisation des procédés industriels de mise en forme des matériaux ou du dimensionnement des constructions métalliques civiles ou industrielles, mais elle concerne par exemple également de plus en plus le calcul des ouvrages de géotechnique, pour lesquels des lois de comportement de type élastoplastique spécifiques ont été développées depuis une cinquantaine d'années (exemple du modèle de *Cam-Clay*). Tout grand code de calcul industriel moderne se doit aujourd'hui d'intégrer ce type de comportement, et il apparaît donc indispensable que l'ingénieur, confronté à des résultats et simulations fournis par de tels codes, puisse en faire l'analyse critique à partir notamment des solutions analytiques de référence qui seront développées dans ce cours.

Cette première partie du cours comporte cinq chapitres.

- Le *chapitre I* traite de la formulation *locale* du comportement élastoplastique en *transformation infinitésimale* pour le milieu continu *tridimensionnel*⁶. Il introduit dans ce contexte la notion de *décomposition additive* de la déformation totale en parties *élastique* et *plastique*, identifiable à partir d'essais de

⁶ Les grandes déformations plastiques telles que celles qui apparaissent sur les figures 2 à 7, ne seront donc pas traitées dans le cadre de ce cours.

charge-décharge sur des éprouvettes, et présente les deux caractéristiques fondamentales de ce comportement que sont le *critère de plasticité* et la *règle d'écoulement plastique* qui viennent se superposer aux propriétés élastiques.

Même si des indications sont fournies concernant le phénomène d'*écrouissage*, c'est le modèle simplifié du comportement *élastique parfaitement plastique* qui sera retenu par la suite. Le chapitre s'achève sur une description détaillée de deux critères de plasticité couramment employés dans la pratique des calculs : les critères de *von Mises* et de *Tresca*.

- Le *chapitre II* qui est au cœur de cette première partie, est quant à lui consacré à la *formulation des problèmes d'évolution élastoplastique* pour les systèmes en milieu continu tridimensionnel. Il débute par le traitement complet d'un exemple très simple de structure réticulée qui met en évidence tous les traits caractéristiques des problèmes d'élastoplasticité : méthode de résolution « *pas-à-pas* » ou *incrémentale*, phase de comportement élastique et *limite d'élasticité*, phénomène d'*écrouissage* de la structure en *phase élastoplastique* aboutissant à la *charge limite* et à l'apparition d'un *mécanisme d'écoulement plastique libre*, et enfin apparition de *contraintes résiduelles* consécutives à la décharge totale de la structure.

Tout comme pour les *problèmes d'élasticité linéarisée*, l'*unicité de la solution* (en contrainte) des problèmes d'évolution *élastoplastique* est alors énoncée dans le cas général. Cette unicité est garantie tant que le trajet de chargement du système demeure à l'intérieur d'un *domaine des chargements supportables*, délimité par les *chargements limites*. Une telle propriété est précieuse, car elle permet d'achever la résolution d'un problème dès qu'une solution vérifiant toutes équations est obtenue. À titre d'exemple illustratif, le problème de la flexion élastoplastique d'un tronçon de poutre cylindrique est traité de manière détaillée, aboutissant à une relation de type « *moment-courbure* » qui sera utilisée sous une forme simplifiée au *chapitre III*.

- Le cas des *structures de poutres fléchies*, modélisées comme des milieux continus *unidimensionnels* pour lesquels seul le moment fléchissant joue un rôle dans le comportement local, est abordé au *chapitre III*. Le calcul élastoplastique d'une structure simple une fois hyperstatique est ainsi réalisé en s'appuyant sur l'adoption d'une loi de comportement « *moment-courbure* » simplifiée, dérivée de celle obtenue au chapitre précédent. Ce calcul met en évidence la nécessité d'introduire le concept essentiel de *rotule plastique*, c'est-à-dire de *discontinuité de rotation (plastique)*, qui n'est pas admissible dans l'hypothèse

d'un comportement purement élastique. Ce type de structure étant toujours *hyperstatique de degré fini*, son évolution élastoplastique fait apparaître un nombre fini de phases élasto-plastiques correspondant à la formation successive de telles rotules plastiques.

- Compte tenu du nombre limité de solutions analytiques de problèmes d'évolution élastoplastique formulés dans le cadre du modèle de milieu continu 3D, il est nécessaire de recourir à une procédure de *résolution numérique* de ces problèmes afin d'en obtenir des solutions aussi approchées que possible. C'est l'objet du *chapitre IV*, qui présente une telle procédure fondée sur une discrétisation en pas de temps du trajet de chargement et une résolution du *problème incrémental* associé à chaque pas de chargement par le biais d'un *algorithme itératif* associé par exemple à une méthode des éléments finis. Cet algorithme, intégré dans de nombreux codes de calcul numérique, est illustré sur quelques exemples analytiques simples.
- Cette première partie s'achève sur le *chapitre V* qui fournit la solution détaillée et complète d'un certain nombre de problèmes d'élastoplasticité, que ceux-ci relèvent d'une modélisation 1D (structures réticulées, poutres en flexion) ou 3D. Certains d'entre eux font même intervenir un *chargement thermique* nécessitant la prise en compte d'une loi de comportement *thermo-élasto-plastique*. Il est indispensable de disposer de telles solutions analytiques pour pouvoir contrôler la qualité et la validité des solutions obtenues par l'application de méthodes numériques décrites au *chapitre IV* et mises en œuvre dans des codes de calcul.

6.2 Calcul à la Rupture (chapitres VI à X)

Partant de la notion de *charge limite*, la théorie du *Calcul à la Rupture*, formulée pour la première fois de manière explicite, systématique et mécaniquement rigoureuse par Salençon (1983), est alors introduite dans le second volet de ce cours. Cette théorie se fonde sur un raisonnement de compatibilité⁷ entre les conditions qui régissent l'*équilibre* d'un système et le respect en tout point d'un *critère de résistance* ou de *rupture*, vu comme une extension de la notion de *critère de plasticité* à des matériaux qui peuvent s'écarter du schéma idéal de la plasticité parfaite.

⁷ Au sens logique du terme.

Elle établit qu'il n'est pas nécessaire de recourir à un calcul élastoplastique complet⁸ jusqu'à la charge limite pour pouvoir évaluer cette dernière par voie directe et plus efficace. De mise en œuvre bien plus commode et rapide, une telle approche est typique de l'ingénieur de Génie Civil confronté au dimensionnement des ouvrages de géotechnique (stabilité de pentes et soutènements, capacité portante de fondations, etc.), tout comme des structures métalliques ou en béton armé et précontraint. Sous le vocable d'*Analyse Limite*, elle est par exemple également à la base des schémas de calcul et de simulation numérique des *procédés de mise en forme* dans le domaine du Génie Mécanique.

- Cette théorie est d'abord présentée au *chapitre VI* sur l'exemple des systèmes de poutres fléchies, examiné précédemment au *chapitre III* sous l'angle du calcul élastoplastique. Elle comporte deux approches complémentaires.
 - ♦ L'*approche statique par l'intérieur* d'une part, qui aboutit à la détermination de *minorants* des chargements limites, appelés *chargements extrêmes*.
 - ♦ L'*approche cinématique par l'extérieur* d'autre part, fondée sur la « dualisation » des conditions d'équilibre par le biais du *Principe des Puissances Virtuelles*, qui aboutit à l'obtention de *majorants* des charges extrêmes.

Dans le cas des systèmes de poutres fléchies soumises à des charges concentrées, il est notamment établi que les charges extrêmes peuvent être déterminées de façon *exacte* en ayant recours à la seule approche cinématique utilisant des *mécanismes avec rotules* placées aux sections potentiellement critiques de la structure fléchie.

- Le *chapitre VII* développe l'application des approches statique et cinématique du calcul à la rupture à des systèmes décrits dans le formalisme de la *mécanique des milieux continus tridimensionnels*. Si le principe de ces approches reste bien évidemment le même que pour le cas des poutres fléchies examiné précédemment, leur mise en œuvre pratique présente deux différences importantes :
 - ♦ Contrairement aux structures à barres fléchies, et plus généralement aux systèmes dont le degré d'hyperstaticité reste *fini*, les approches statiques et cinématiques pour les systèmes continus tridimensionnels n'aboutissent dans la plupart des cas qu'à un *encadrement* des chargements extrêmes qui sera d'autant plus précis que l'espace des champs de contrainte ou de vitesse explorés sera plus vaste.

⁸ Et donc le plus souvent lourd et fastidieux, notamment en temps de calcul (voir chapitre IV).

- ◆ La mise en œuvre de l'approche cinématique exige que les champs de vitesse explorés dans cette approche, respectent absolument certaines conditions, dites *conditions de pertinence*, qui diffèrent radicalement selon que le critère adopté est *purement cohérent* (von Mises et Tresca) ou *frottant* (Mohr-Coulomb).
- L'application de la théorie du calcul à la rupture au dimensionnement des *plaques et dalles minces en flexion*, modélisées comme des *milieux continus bidimensionnels*, fait l'objet du *chapitre VIII*. Le critère de résistance porte alors dans ce cas sur le seul tenseur des moments fléchissants (critère de *Johansen*). Même si les deux approches (statique et cinématique) sont là encore bien évidemment possibles, l'approche cinématique par l'extérieur utilisant des mécanismes avec *charnières*, homologues des *rotules* pour les poutres 1D, beaucoup plus facile et intuitive à mettre en œuvre, est ici privilégiée.
- Même si la mise en œuvre analytique ou semi-analytique des approches du calcul à la rupture suffit dans beaucoup de cas pour obtenir un encadrement relativement précis des chargements extrêmes d'une structure ou d'un ouvrage, il est tout de même indispensable de disposer d'une méthode numérique permettant d'aborder de façon systématique la résolution de problèmes plus complexes. Le *chapitre IX* décrit une telle méthode fondée sur l'utilisation de la méthode des éléments finis permettant d'explorer des espaces suffisamment vastes de champs de contrainte ou de vitesse. Les procédures de maximisation ou de minimisation correspondantes, associées respectivement aux approches statique et cinématique, sont alors traitées par des *algorithmes d'optimisation linéaire et non-linéaire* qui sont brièvement décrits dans ce chapitre.
- Tout comme pour la première partie consacrée à l'*Élastoplasticité*, le *chapitre X* vient clore cette seconde partie en présentant de nombreuses applications possibles des approches du calcul à la rupture à l'analyse d'une grande variété de problèmes, que ceux-ci relèvent d'une modélisation 1D (systèmes de poutres ou d'arcs en flexion), 2D (dalles en béton) ou 3D (ouvrages de géotechnique notamment). Même si la valeur exacte du chargement de ruine n'est pas toujours accessible aux calculs analytiques auxquels donne lieu la mise en œuvre des approches statiques et cinématiques, un *encadrement* parfois précis de ce chargement de ruine est toujours obtenu sur de nombreux problèmes et peut être significativement amélioré par l'utilisation de méthodes de calcul numériques décrites au chapitre IX.

On pourra enfin trouver à la fin du document une annexe récapitulant l'ensemble des références citées dans ce cours, complétée par une bibliographie plus exhaustive, constituée d'ouvrages et d'articles.

Ce cours écrit est une version actualisée, substantiellement revue et augmentée, d'une édition précédente parue en 2007. Tout comme cette dernière, il s'inspire largement (y compris pour ce qui concerne les notations mathématiques !) des cours suivants précédemment enseignés à l'ENPC et publiés chez le même éditeur :

- Halphen, B. et Salençon, J. *Élasto-plasticité*. Presses de l'ENPC, 1987.
- Salençon, J. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'ENPC, 1983.

On trouvera dans ces deux ouvrages certains développements théoriques ou démonstrations de résultats qui seront ici admis et simplement énoncés, tandis que le présent ouvrage met en revanche l'accent sur la résolution détaillée de nombreux problèmes d'élastoplasticité et de calcul à la rupture (chapitres V et X), ainsi que sur les méthodes numériques employées pour les résoudre (chapitre IV et IX).