

APPLICATION DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Jacques Long Trinh



Presses des Ponts

Application de la résistance des matériaux

Jacques Long **Trinh**



SOMMAIRE

Préface	5
Bibliographie.....	6
 Chapitre 1	
Théorie de l'élasticité – applications	7
 Chapitre 2	
Théorie de l'élasticité – application aux ouvrages massifs	17
 Chapitre 3	
Théorie d'élasticité – calcul d'une console mince	25
 Chapitre 4	
Théorie des poutres	33
 Chapitre 5	
Effort tranchant de section pleine	49
 Chapitre 6	
Effort tranchant de section ouverte	55
 Chapitre 7	
Torsion pure et libre de section pleine.....	61
 Chapitre 8	
Effort tranchant de section mince fermée	69
 Chapitre 9	
Torsion de profil mince ouvert	83

Chapitre 10

Torsion libre et torsion gênée des sections minces 97

Chapitre 11

Flexion transversale des structures à parois minces 113

Chapitre 12

Méthode des matrices-transferts 119

Chapitre 13

Méthode des forces – Applications 127

Chapitre 14

Poutre continue 147

Chapitre 15

Structures réticulées 169

Chapitre 16

Portiques 191

Chapitre 17

Arcs et anneaux plans charges dans leur plan 211

Chapitre 18

Structures spatiales 221

Chapitre 19

Méthode des déplacements 239

PRÉFACE

Les constructions sont soumises à diverses actions d'origine climatique, neige, vent, température, d'actions dues aux charges d'exploitation, dues à la gravité et parfois de nature accidentelle, chocs, séismes. La résistance des matériaux est l'une des sciences fondamentales de l'ingénieur constructeur. Elle fournit le moyen de calculer les efforts dans une structure et de dimensionner celle-ci en conséquence, à partir des propriétés des matériaux employés.

Mais, pour comprendre le fonctionnement des structures, il est nécessaire de recourir à des modèles. Ces modèles peuvent être numériques, c'est-à-dire, hautement sophistiqués, ou simplifiés, issus de la théorie de l'élasticité et sanctionnés par l'expérience. Lorsque l'on recourt aux modèles numériques, il est parfois difficile d'en interpréter les résultats si l'on n'a pas correctement identifié certains phénomènes grâce à une réflexion théorique approfondie. Les modèles de la résistance des matériaux servent à la conception des ouvrages, les plus grands comme les plus modestes.

Le présent ouvrage propose des problèmes accompagnés de solutions détaillées qui constituent des sujets de réflexion et contribuent à l'acquisition du « sens de l'ingénieur ». Ils correspondent aux sujets étudiés au cours des séances de travaux dirigés des écoles d'ingénieurs, notamment du Centre des Hautes Études de la Construction (CHEC). Il s'adresse donc aux étudiants en fin de formation à la résistance des matériaux, mais il peut également s'avérer utile aux professeurs débutants et susciter également de l'intérêt chez des ingénieurs s'intéressant à élever leur niveau de connaissances.

Il est le bilan de nombreuses années de recherche et d'enseignement de Jacques Long Trinh. Certes, toute la science des constructions n'est pas abordée, mais cet ouvrage traite un large éventail de problèmes modélisant des structures à barres ou à poutres, planes ou spatiales, autant de sujets que les ingénieurs rencontrent le plus couramment.

Je souhaite un bel avenir à ce livre très pédagogique et de haute tenue.

Jean-Armand Calgaro

Ingénieur général honoraire des ponts et Chaussées

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Mandel J., *Cours de mécanique des milieux continus*, Gauthier-Villars, Paris, 1966.
- [2] Lacroix R., *Théorie de l'élasticité*, Techniques de l'Ingénieur, Série A.
- [3] Landau L., Lifchitz E., *Théorie de l'élasticité*, Éditions Mir, Moscou, 1967.
- [4] Timoshenko S., Goodier J., *Théorie de l'élasticité*, C. Béranger, Paris, 1961.
- [5] Courbon J., *Résistance des matériaux*, tomes I et II, Dunod, Paris, 1971.
- [6] Timoshenko S., *Résistance des matériaux*, tomes I et II, Dunod, Paris, 1968.
- [7] Kollbrunner C. C., Basler K., *Torsion – Applications à l'étude des structures*, Spes, Lausanne, Bordas, Paris, 1970.
- [8] Vlassov B.Z., *Pièces longues en voiles minces*, Eyrolles, Paris, 1972.
- [9] Kristek V., *Theory of box girders*, John Wiley & Sons, 1979.
- [10] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Théorie des plaques et coques*, Dunod, Paris, 1961.
- [11] Pücher A., *Einflußfelder elastischer Platten*, Springer-Verlag, Vienne, 1951.
- [12] Barès R., Massonnet C., *Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes selon la méthode Guyon-Massonnet-Bareš*, Dunod, Paris, 1966.
- [13] Géry P.M., Calgaro J.-A., *Les matrices-transfert dans le calcul des structures*, Eyrolles, Paris 1973.
- [14] Homberg H., Ropers W., *Fahrbahnplatten mit veränderlicher Dicke*, Springer Verlag, 1965.
- [15] Albiges N., Coin A., *Résistance des matériaux*, Eyrolles, Paris, 1969.
- [16] Calgaro J. A., Lecoindre D., *Les fondamentaux de la résistance de matériaux*, Le Moniteur, CHEC, Paris 2024.

CHAPITRE 1

THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ – APPLICATIONS

1 HYPOTHÈSES

La théorie traite des matériaux de comportement élastique et isotrope et de très petites déformations à l'application des actions extérieures. Il en résulte l'important Principe de superposition ou d'additivité des effets d'actions.

2 NOTION DE DÉFORMATIONS RELATIVES

À l'application d'un chargement un corps élastique se déforme. Un point quelconque M en se déplaçant, vient en M' : $\overrightarrow{MM'}(u_x, u_y, u_z)$.

Dans le référentiel cartésien orthonormé (x, y, z) , la transformation du matériau se décompose en :

- une translation de solide de coordonnées (u_i) ;
- une rotation de solide de composantes (p_i) ;
- et une déformation pure (ε) . Le champ autour du point M est caractérisé par une grandeur appelée tenseur :

$$(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \text{ avec } \varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) / 2 = \varepsilon_{ji}$$

Les grandeurs ε_{ij} sont des composantes de la déformation pure linéaire.

Les composantes de la rotation sont :

$$p_x = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) / 2 ; p_y = \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) / 2 \text{ et } p_z = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) / 2$$

Le déplacement est défini par les équations du déplacement :

$$\begin{aligned} du_x &= \varepsilon_{xx} d_x + (\varepsilon_{xy} - p_z) d_y + (\varepsilon_{xz} + p_y) d_z \\ du_y &= (\varepsilon_{xy} + p_z) d_x + \varepsilon_{yy} d_y + (\varepsilon_{yz} - p_x) d_z \\ du_z &= (\varepsilon_{xz} - p_y) d_x + (\varepsilon_{yz} + p_x) d_y + \varepsilon_{zz} d_z \end{aligned}$$

Les équations de la compatibilité des déformations ou condition d'intégrabilité (Eq. de Beltrami) :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right)$$

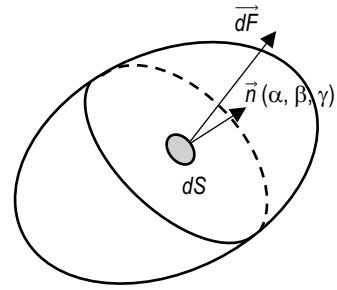
Les deux autres expressions sont déduites par permutations circulaires des axes.

3 NOTION DE CONTRAINTES

$$\vec{\sigma} = \left(\frac{d\vec{F}}{dS} \right)_{\lim dS \rightarrow 0}$$

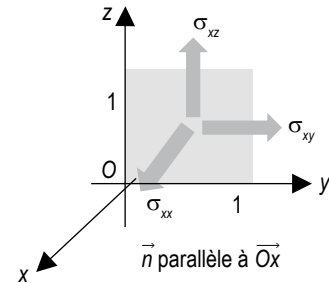
Le champ de contraintes (pression) autour d'un point M dans un solide est caractérisé par un tenseur symétrique (T)

$$(T) = (\sigma_{ij}) = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ avec } i \neq j$$



La signification physique des σ_{ij} est présentée pour le cas d'actions sur une surface unitaire perpendiculaire à l'axe Ox

$$\vec{\sigma} = (T) \cdot \vec{n} = \begin{cases} \sigma_{xx} \alpha + \sigma_{xy} \beta + \sigma_{xz} \gamma \\ \sigma_{yx} \alpha + \sigma_{yy} \beta + \sigma_{yz} \gamma \\ \sigma_{zx} \alpha + \sigma_{zy} \beta + \sigma_{zz} \gamma \end{cases}$$



4 NOTION D'ÉQUILIBRE

- Forces massiques $\vec{F}$

$$\text{div}(T) + \vec{F} \left(\text{composantes } f_x, f_y, f_z \right) = \vec{0}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 ; \text{ etc}$$

- Équilibre aux bords, en application du principe d'équivalence :

$$\text{forces internes aux bords } (T) \cdot \vec{n} = \vec{F}_s \text{ (force surfacique)}$$

5 LOI DE HOOKE

Les matériaux élastiques sont définis par les caractéristiques de module d'élasticité longitudinal E ou de Young et le module de Poisson ν . Relations entre les contraintes et les déformations relatives, écrites dans un référentiel cartésien orthonormé :

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)\varepsilon_{ii} + (\varepsilon_{jj} + \varepsilon_{kk}) \right] \quad \text{et} \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{kk}) \right] \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij}$$

6 MÉTHODE SEMI-INVERSE DE SAINT VENANT

Démarche pratique de résolution approchée des problèmes d'élasticité.

- On se donne un champ de contraintes vérifiant les conditions d'équilibre, aux limites et de compatibilité des déformations. Celles-ci écrites avec les grandeurs contraintes et en supposant que les forces de masse sont nulles $\vec{F} = \vec{0}$:

$$\text{Eq. de BELTRAMI : } (1+\nu)\Delta\sigma_{il} + \frac{\partial^2 j}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \text{ pour tout } i, j, k \text{ (} = x, y, z \text{)}$$

$$\text{avec } J_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \text{ (invariant, trace du tenseur } (T)) \text{ et } \Delta\varphi = \sum_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}$$

NOTE – L'expression des deux autres invariants exprimée en coordonnées cartésiennes :

$$J_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{yz}^2 - \sigma_{zx}^2 \quad \text{et} \quad J_3 = \text{déterminant de } \sigma$$

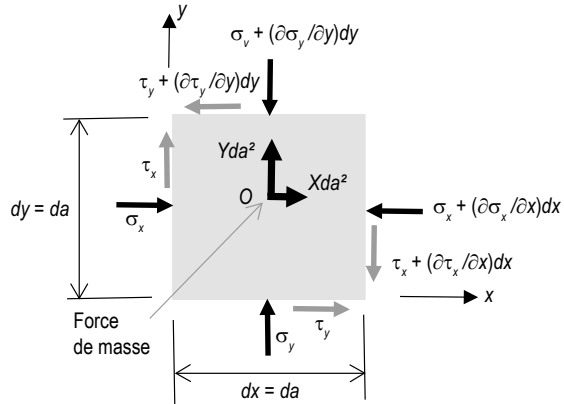
- Ensuite, est calculé le champ des déformations ε_{ij} , puis le champ des déplacements (u_i) par intégration.

7 THÉORÈME DE CAUCHY

L'équilibre d'un élément unitaire interne est montré sur le schéma ci-joint. En prenant le moment des forces par rapport au centre O et en se limitant au 1^{er} ordre :

$$2\tau_x \frac{da}{2} - 2\tau_y \frac{da}{2} = 0$$

$$\tau_x = \tau_y$$



8 DIRECTIONS PRINCIPALES ET CONTRAINTES PRINCIPALES

Un champ de contraintes donné dans un référentiel cartésien $Oxyz$ orthonormé, peut y être caractérisé par trois directions orthogonales particulières, directions pour lesquelles la contrainte dans son sens prend une valeur extrême.

- Ces trois directions sont, désignées **directions principales**, chacune est repérée par les coordonnées de son vecteur unitaire (α, β, γ) .
- Les trois contraintes correspondantes sont appelées **contraintes principales**.

Ces grandeurs sont en général inconnues pour un champ de contraintes donné qu'il faut rechercher.

8.1 Détermination des contraintes principales

L'écriture des équations du champ de contraintes principales : $\vec{\sigma} = (\sigma) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

Dans le référentiel des directions principales, la matrice (σ) est diagonale. Mais ses termes sont des inconnues variables à déterminer à partir de la matrice du champ considéré.

$$\sigma_{xx}\alpha + \sigma_{xy}\beta + \sigma_{xz}\gamma = \alpha\sigma$$

$$\sigma_{yx}\alpha + \sigma_{yy}\beta + \sigma_{yz}\gamma = \beta\sigma$$

$$\sigma_{zx}\alpha + \sigma_{zy}\beta + \sigma_{zz}\gamma = \gamma\sigma$$

Ou

$$(\sigma_{xx} - \sigma)\alpha + \sigma_{xy}\beta + \sigma_{xz}\gamma = 0$$

$$\sigma_{yx}\alpha + (\sigma_{yy} - \sigma)\beta + \sigma_{yz}\gamma = 0$$

$$\sigma_{zx}\alpha + \sigma_{zy}\beta + (\sigma_{zz} - \sigma)\gamma = 0$$

Le système est homogène, comme les inconnues α , β et γ ne sont pas nulles il revient à trouver les racines du déterminant :

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

L'équation se met sous la forme algébrique :

$$\sigma^3 - \sigma^2 J_1 + \sigma J_2 - J_3 = 0$$

L'équation a trois racines réelles indépendantes du référentiel $Oxyz$ retenu, les trois coefficients J_1 à J_3 sont qualifiés **invariants** :

$$J_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} ; J_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} - (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)$$

$$\text{et } J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

8.2 Exemples d'analyse de champ de contraintes

8.2.1 État des forces internes correspondant au tenseur

$$(T) = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$$

a est la valeur de la pression donnée (traction > 0).

C'est un état de compression triaxiale de valeur a .

8.2.2 Déterminer les contraintes principales du champ des contraintes du tenseur

$$(T) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

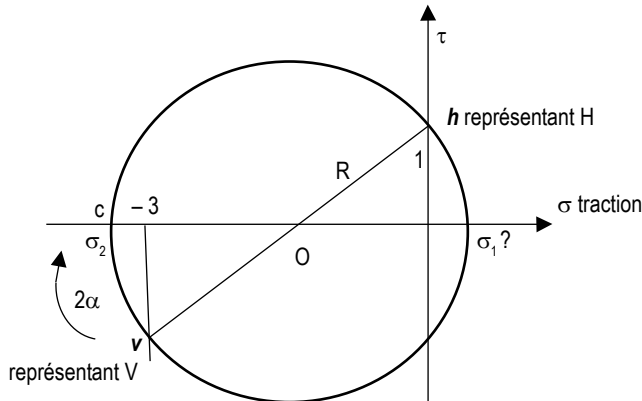
$$J_1 = 3a; J_2 = 0 \quad \text{et} \quad J_3 = 3a \begin{vmatrix} a & a \\ a & a \end{vmatrix} = 0$$

Soit $\sigma^3 - 3a\sigma^2 = 0$, ce qui donne $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ et $\sigma_3 = 3a$.

Le champ de contraintes est donc une simple traction uni axiale.

8.2.3 Étude du champ de contraintes plan du schéma ci-joint

Représentation dans le cercle de MOHR



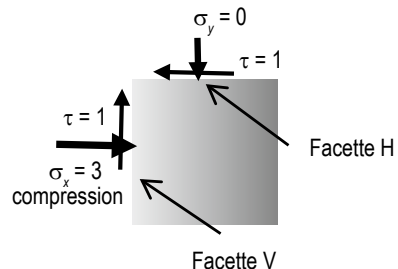
Rayon du cercle de MOHR : $R = \sqrt{(3/2)^2 + 1} = 1,80$

σ_1 contrainte principale de traction = $1,80 - 1,50 = 0,3$

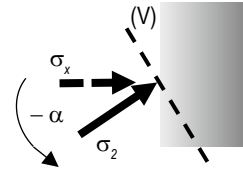
σ_2 contrainte principale de compression = $-1,80 - 1,50 = -3,30$

Pour passer du point représentatif v (facette verticale) au point représentatif de la facette sur laquelle s'applique la compression principale, on tourne d'un angle 2α dans le sens à la rotation des aiguilles d'une montre sur le cercle de MOHR. L'angle α est déterminé par la relation :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$



Dans la réalité pour passer de la facette verticale à celle sur laquelle s'applique de plus grande compression, il faut tourner d'un angle $-\alpha$ dans le sens opposé à la rotation des aiguilles d'une montre.



9 MASSIF À COMPRESSION CONSTANTE

Soit à trouver la forme d'une barre verticale qui sous son poids propre (poids volumique ρ) est en compression constante extérieure sur toute sa hauteur.

$$\sigma\{x\} = \frac{P}{B\{x\}} + \frac{1}{B\{x\}} \int_0^x \rho B\{u\} du = \frac{P}{B_o}$$

$$P + \int_0^x \rho B\{u\} du = \frac{P}{B_o} B\{x\}$$

En dérivant :

$$\rho B\{x\} = \frac{P}{B_o} \frac{dB\{x\}}{dx}$$

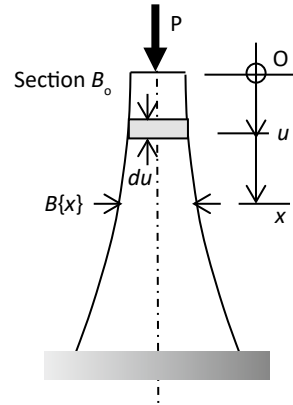
$$\frac{B_o}{P} \rho dx = \frac{dB\{x\}}{B\{x\}}$$

$$\frac{B_o}{P} \rho x + C(\text{cste}) = \ln(B\{x\}) \quad C = \ln(B\{x=0\}) = \ln(B_o)$$

$$\frac{B_o}{P} \rho x + \log(B_o) = \ln(B\{x\}) \quad \frac{B_o}{P} \rho x = \ln\left(\frac{B\{x\}}{B_o}\right)$$

Finalement :

$$B\{x\} = B_o e^{\frac{B_o}{P} \rho x}$$



10 TIGE TENDUE SOUS POIDS PROPRE

Soit une tige attachée à son extrémité supérieure au support fixe. Sa section droite a une aire constante B , le matériau a un poids volumique ρ , un module d'élasticité E et un coefficient de dilatation thermique α .

10.1 Effet des actions (poids propre + charge P)

À l'extrémité inférieure est appliquée une force longitudinale de traction P .

L'allongement local à une distance x de l'extrémité inférieure est : $P + B\rho x$

La contrainte normale de traction est :

$$\sigma\{x\} = \frac{P + B\rho x}{B}$$

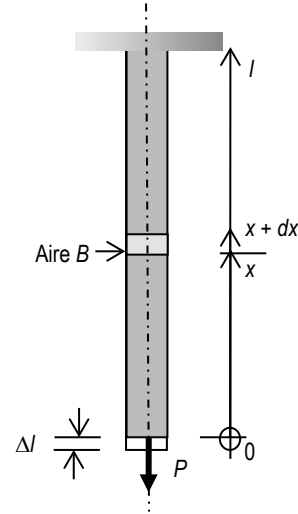
La déformation relative à ce niveau est :

$$\varepsilon\{x\} = \frac{P + B\rho x}{BE}$$

L'allongement total de la tige s'élève pour le chargement considéré :

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon\{x\} dx = \int_0^l \frac{P + B\rho x}{BE} dx$$

$$\Delta l = \frac{P}{BE} l + \frac{\rho l^2}{2E}$$



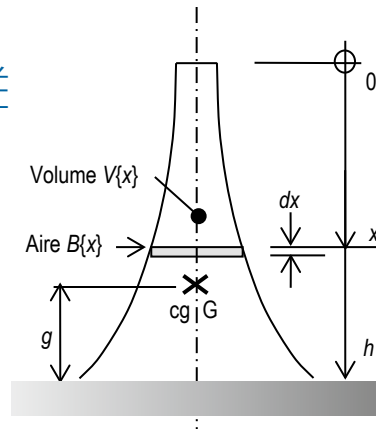
10.2 Effet de variation thermique

Si en outre, la barre étant initialement à une température ambiante T , est soumise à une augmentation de température de ΔT . L'effet dû à la variation de température est une dilatation de $\alpha\Delta T$ (α désigne le module de dilatation du matériau). Cette dilatation s'ajoute à l'allongement mécanique précédent. Soit au total :

$$\Delta l = \alpha l \Delta T + \frac{P}{BE} l + \frac{\rho l^2}{2E}$$

11 DÉPLACEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ D'UN MASSIF SOUS SON POIDS PROPRE

Soit la structure de révolution représentée, pesante, reposant sur sa base. Ses caractéristiques géométriques sont connues. Le matériau a un poids volumique ρ et un module d'élasticité E .



On se propose de trouver la position de son centre de gravité G (distance g du sol) en tenant compte du tassement dû à son poids propre. Au niveau distant de x du sommet, la contrainte de compression normale est : $\sigma\{x\} = \frac{\rho V\{x\}}{B\{x\}}$

La diminution d'épaisseur dx de la tranche élémentaire à ce niveau s'élève à :

$$dx \left(1 - \rho \frac{V\{x\}}{EB\{x\}} \right)$$

Par suite de cet affaissement, la distance de ce niveau au sol devient :

$$f\{x\} = \int_x^h \left(1 - \rho \frac{V\{u\}}{EB\{u\}} \right) du$$

Le volume attaché à ce niveau est : $\rho B\{x\} dx$

Le déplacement du centre de gravité G est donné par l'équation de définition du barycentre :

$$g\rho V = \int_0^h \rho f\{x\} B\{x\} dx$$

$$gV = \int_0^h B\{x\} dx \int_x^h \left(1 - \rho \frac{V\{u\}}{EB\{u\}} \right) du$$

Cas particulier – La section droite de la structure est constante sur toute la longueur :

$$V = Bh \text{ et } V\{x\} = B\{x\}x$$

$$g = \frac{1}{h} \int_0^h dx \int_x^h \left(1 - \rho \frac{u}{E} \right) du$$

$$g = \frac{1}{h} \int_0^h dx \left(u - \rho \frac{u^2}{2E} \right)_x^h$$

$$g = \frac{1}{h} \int_0^h dx \left(h - \rho \frac{h^2}{2E} - x + \rho \frac{x^2}{2E} \right)$$

$$g = \frac{1}{h} \left(hx - \rho \frac{h^2}{2E} x - \frac{x^2}{2} + \rho \frac{x^3}{6E} \right)_0^h = \frac{h}{2} - \rho \frac{h^2}{3E}$$

Par rapport à la position simplifiée à la hauteur $x = h/2$, le centre de gravité est descendu d'une distance : $\rho \frac{h^2}{3E}$

